Отношения и соответствия

В математике рассматривают связи между элементами одного множества и называют их отношениями.

Если рассматривают отношения между двумя элементами, то их называют бинарными.

Отношения многообразны:

- между понятиями – это отношения род и вида, части и целого;
- между предложениями – это отношения следования и равносильности;
- между числами – «больше», «меньше», «равно», «больше на…» и т. п.

Пусть на множестве $X = \{2, 4, 6\}$ задано отношение «больше».

Это значит: $6 > 4, 6 > 2, 4 > 2$. Полученные неравенства можно записать в виде упорядоченных пар: $(6; 4)$, $(6; 2), (4; 2)$ – это элементы декартового произведения $X \times X$. Т.е. отношение «больше» является подмножеством множества $X \times X$.

***Обозначение*: R, S, T, P и др. – отношения**

Читают:

- xRy **-«элементы x находится в отношении R с элементом y»**

$$(x, y) \in R$$

- **Если R – отношение на множестве x, то $R \subset X \times X$**

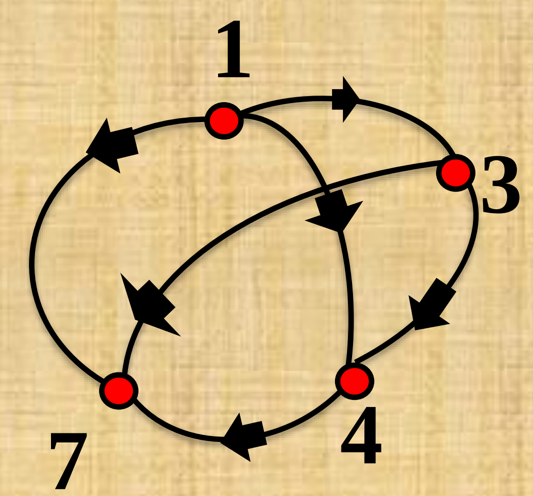
Способы задания отношений:

- **указание характеристического свойства** $(x \vdots y)$
- **перечисление всех пар, заданных отношением.**
- **построение графа (чертеж, состоящий из точек и стрелок)**

Точки **– вершины графа**

Стрелки **– отношения между элементами.**

Пример. $\boldsymbol{S}$ – **x<y** на множестве $\boldsymbol{X} = \{\mathbf{1}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{7}\}$.



$$\{(1;3),(1;4),(1;7),(3;4),(3;7),(4;7)\}$$

Рассмотрим на множестве отрезков на рис.1 отношения

- перпендикулярности
- равенства
- «длиннее»

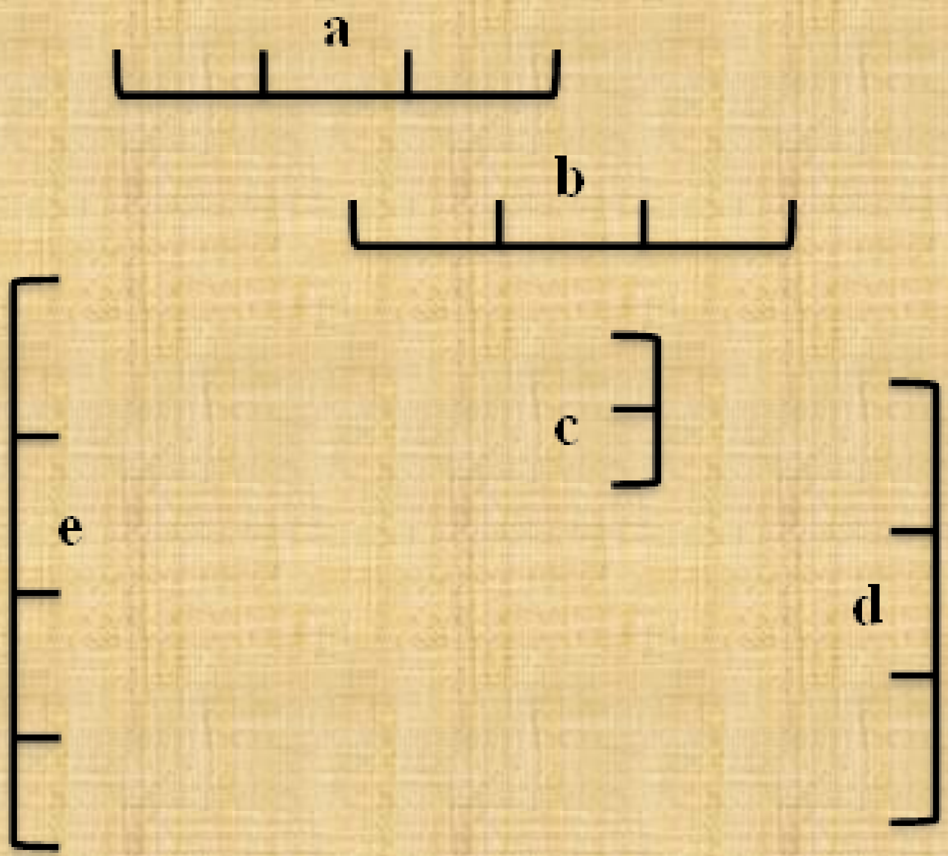


Рисунок1

Построим графы данных отношений. Сравним их и выделим свойства.

Рисунок 2 «Граф отношений равенства»

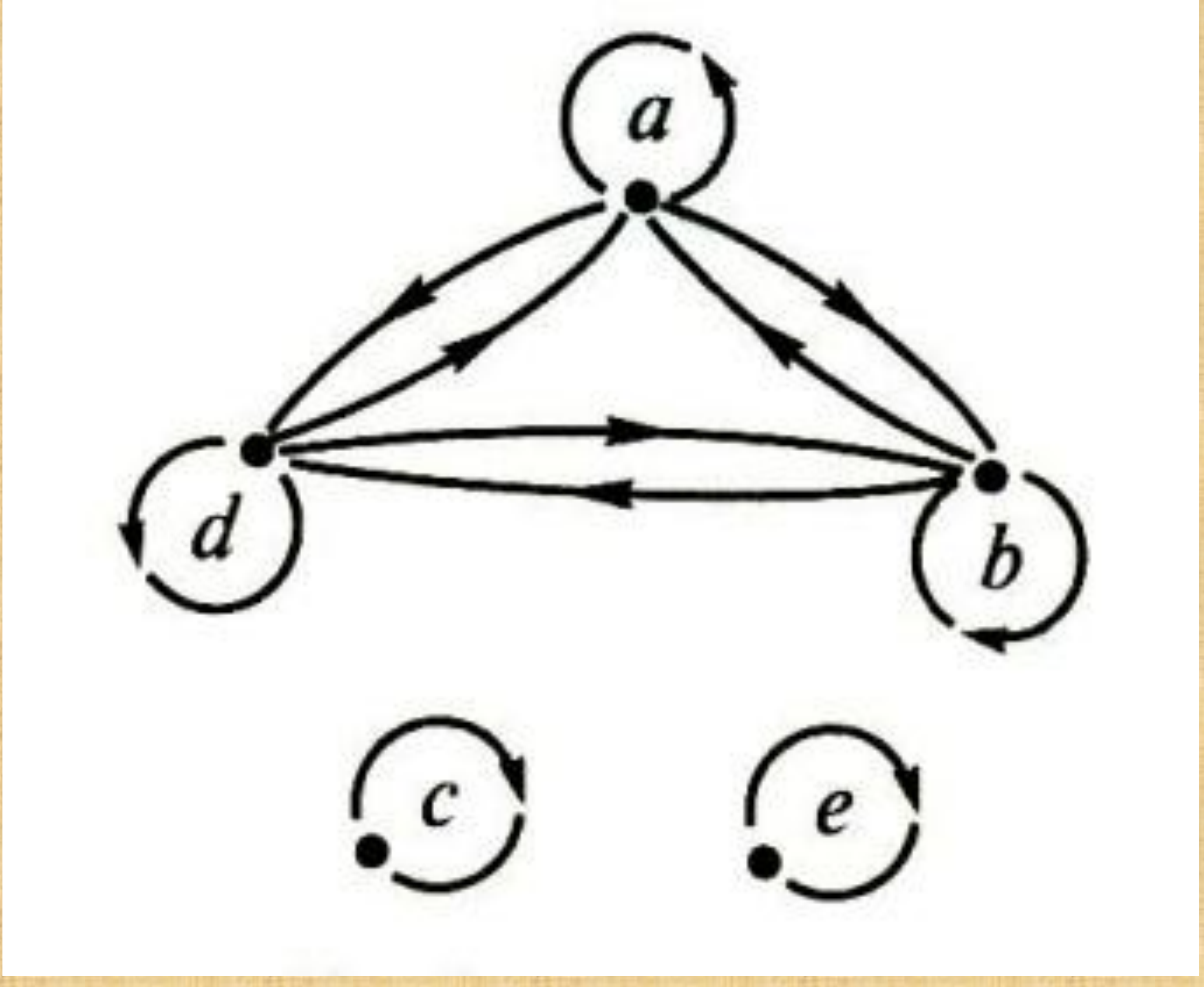


Рисунок 3 «Граф отношения перпендикулярности»

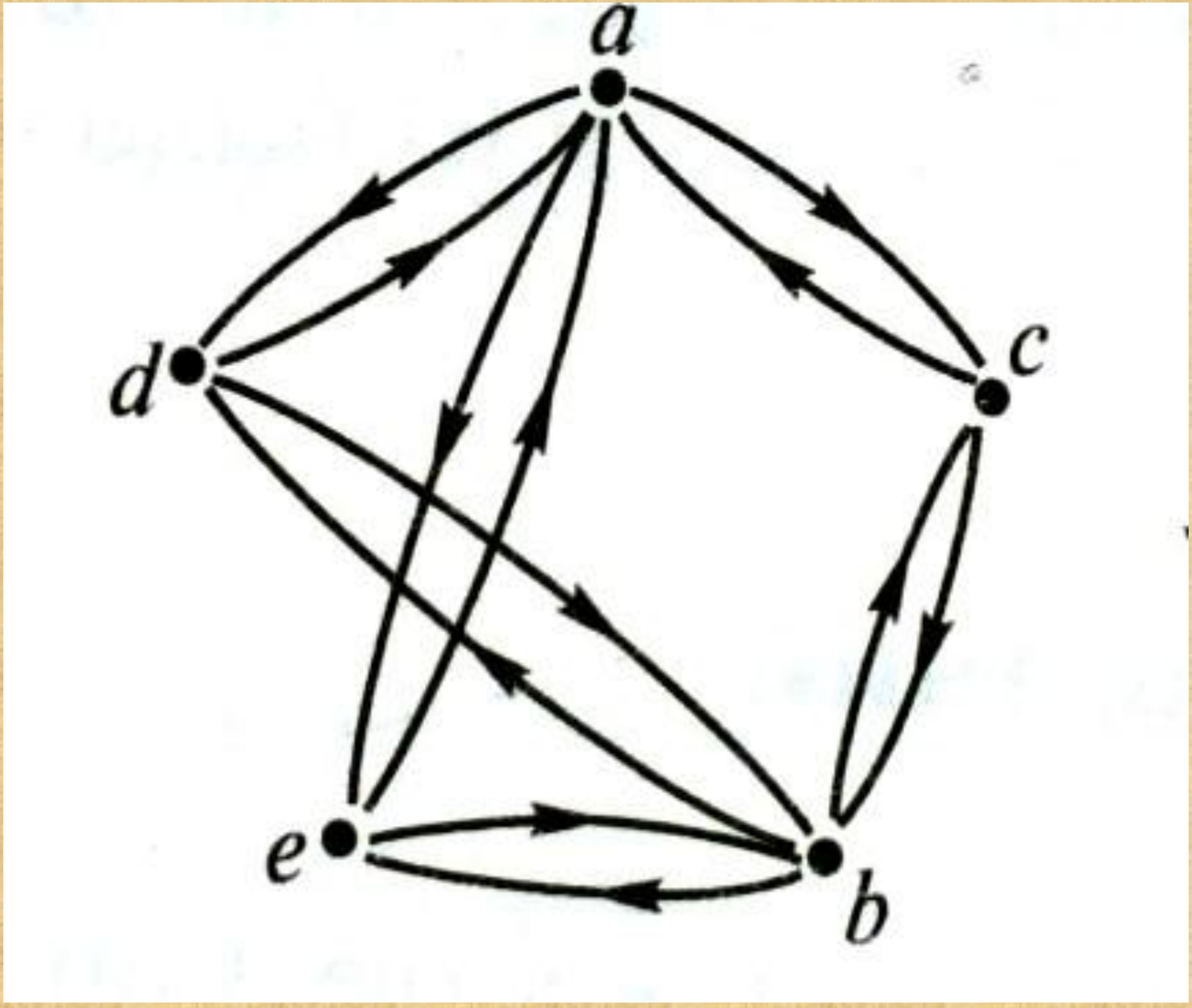
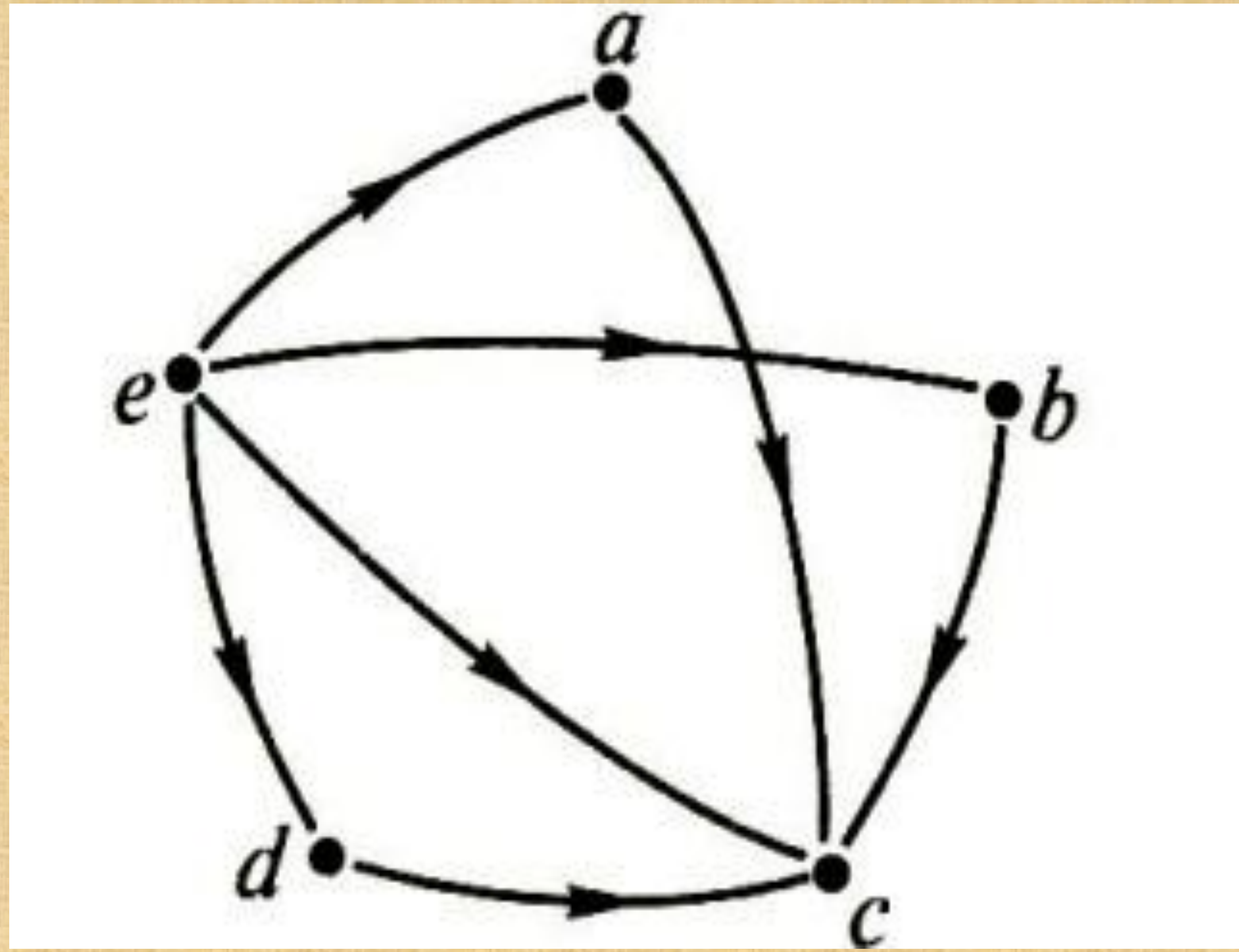
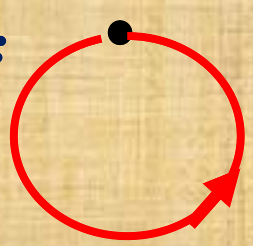


Рисунок 4 «Граф отношения длиннее»



Определение. **Отношение R на множестве X называется рефлексивным, если о каждом элементе множества X можно сказать, что он находится в отношении R с самим собой.**

$\boldsymbol{R}$ рефлексивно на $\boldsymbol{X} \Leftrightarrow \boldsymbol{xRx},$ для $\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$

На графе:  **«петля» в каждой вершине графа.**

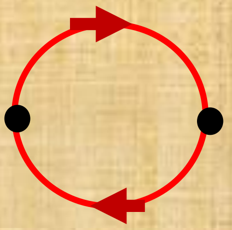
Рефлексивны отношения:

- **равенства (рисунок 2 «каждый отрезок равен сам себе»).**
- **кратности (каждое N число кратно самому себе).**
- **подобия.**

Определение. **Отношение R на множестве X называется *симметричны*, если из того что элемент x находится в отношении R с элементом y, следует, что и элемент y находится в отношении R с элементом x:**

$$\boldsymbol{R} \text{ симметрично на } \boldsymbol{X} \Leftrightarrow \boldsymbol{xRy}, \Rightarrow \ \boldsymbol{yRx}$$

На графе:



Симметричны отношения:

- **перпендикулярности (если а ⊥в, то в ⊥а).**
- **равенства (если а = в, то в = а).**
- **параллельности (если а ∥ в, то в ∥ а).**

Не обладают симметричностью отношения:

- **«длиннее»**
- **больше, меньше**

Говорят, что они *«антисимметричны»*.

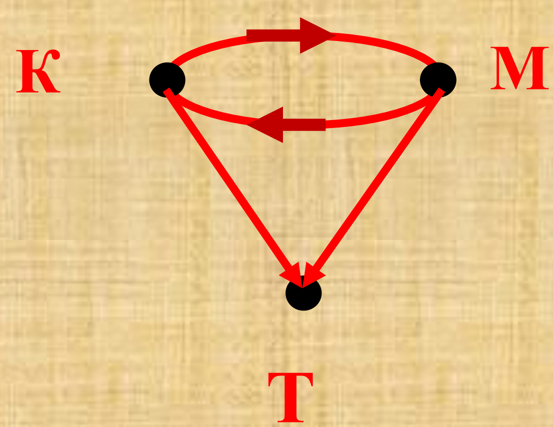
Определение. **Отношение R на множестве X называется антисимметричным, если для различных элементов x и y из множества X выполняется условие: из того что x находится в отношении R с элементом x не находится.**

$$\boldsymbol{R} \text{ симметрично на } \boldsymbol{X} \Leftrightarrow \boldsymbol{xRy} \text{ и } \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y} \Rightarrow \boldsymbol{y\overline{R}x}$$

На графе:  **две вершины соединены только одной стрелкой.**

Существуют отношения, которые не обладают ни свойством симметричности, ни свойством антисимметричности.

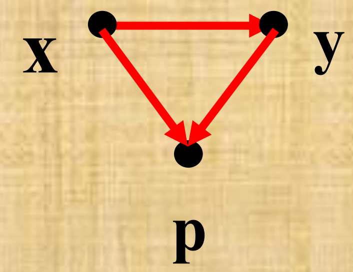
Пример. **Дано отношение «быть сестрой» на множестве детей одной семьи: Катя, Маша, Толя.**



Определение. **Отношение R на множестве X называется *транзитивным*, если выполняется условие: из того, что элемент x находится в отношении R с элементами y и элементы y находится отношении R с элементами p, следует, что элементы x находятся в отношении R с элементами p.**

$$\boxed{\boldsymbol{R} \text{ транзитивно на } \boldsymbol{X} \Leftrightarrow \boldsymbol{xRy} \text{ и} \boldsymbol{yRp} \Rightarrow \boldsymbol{xRp}}$$

На графе:



Транзитивны отношения:

- **равенства ($a = b$, и $b =$ с $\Rightarrow a = c$).**
- **«длиннее»**
- **параллельности ($a \parallel b$, и $b \parallel$ с $\Rightarrow a \parallel c$).**
- **меньше, больше**

Не обладают транзитивностью отношения – **перпендикулярности.**

Обратимся к отношению «равенства» на множестве отрезков (рисунок 2).

Данное отношение обладает свойствами:

- **рефлексивность (каждый отрезок равен сам себе);**
- **симметричность ($a = b, \Leftrightarrow b = a$);**
- **транзитивность ($a = b$, и $b =$ с $\Rightarrow a = c$).**

Говорят, что отношение равенства является отношением *эквивалентности.*

Определение. **Отношение R на множестве X называется отношением эквивалентности, если оно рефлексивно, симметрично, транзитивно.**

Отношение параллельности – отношение эквивалентности.

Множество отрезков на рисунке 2 разбилось на два подмножества:

{a,b,d} и {c,e}- подмножества не пересекаются, а их объединение совпадает с множеством X.

$$\{X = a, b, d, c, e\}$$

Т.е. имеет место разбиение множества X на классы.

Если на множестве X задано отношение эквивалентности, то оно порождает разбиение этого множества на попарно непересекающиеся подмножества (классы эквивалентности).

Верно и обратное утверждение.

Определение. **Отношение R на множестве X называется отношением порядка, если оно транзитивно и антисимметрично.**

Является отношением порядка отношения:

- **«меньше»**
- **«длиннее»**

Изучая окружающий мир, математика рассматривает не только объекты, но главным образом связи между ними. Эти связи называют зависимостями, соответствиями.

Определение. Соответствием **между элементами множества X и У называется всякое подмножество декартова произведения этих множеств.**

Обозначения: **R, S, T, Pи др.**

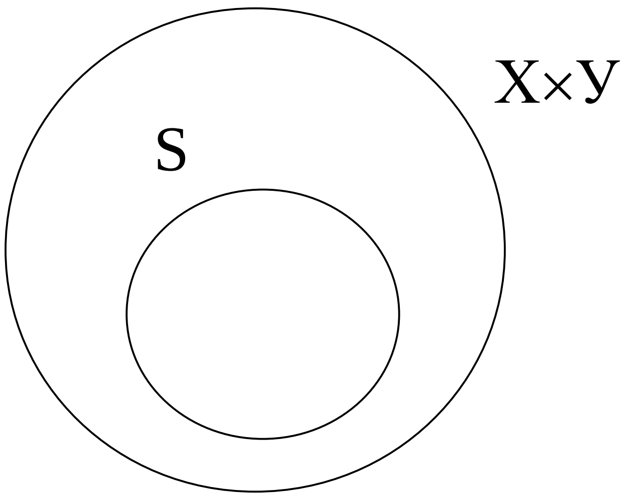
Если S – соответствие между элементами множеств X и Y, то $S \subset X \times Y$**).**

Способы задания соответствия:

- **Указание характеристического свойства а< в, а** $\in$ X, **в** $\in$ **У.**
- **Перечисление пар элементов**
- **С помощью графа или графика.**

Соответствия между элементами двух множеств

Соответствием между элементами множеств Х и У называется всякое подмножество декартова произведения этих множеств.



Соответствия обозначаются буквами Р, S, Т и др.

Если S – соответствие между множествами Х и У, то $S \subset X \times Y$.

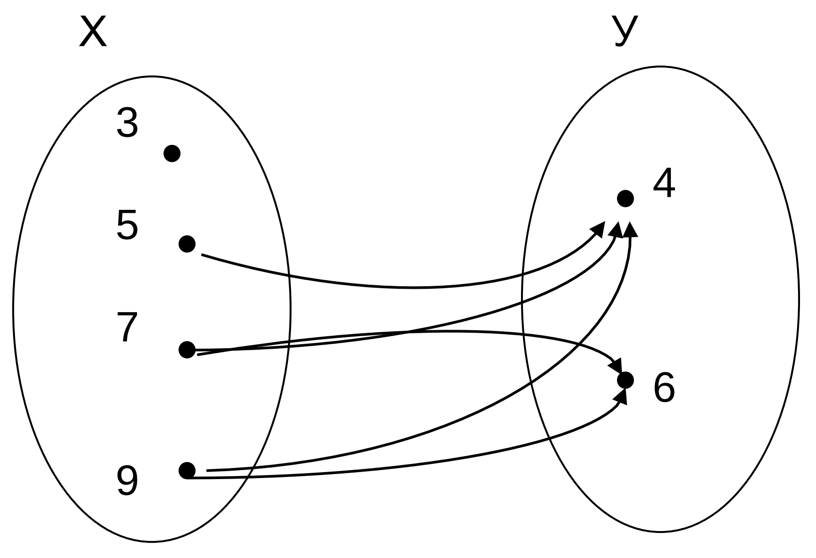
Примеры:

1. X = {3, 5, 7, 9}, У = {4, 6}, S: «больше».

1) S: «x больше y», где $x \in$ X, $y \in$ У или S: «$x > y$».

2) S = {(5;4), (7;4), (9;4), (7;6), (9;6)}.

3) При помощи графа:



Пусть S – соответствие между элементами множеств X и У. Соответствие S^{-1} между элементами множеств У и X называется **обратным данному**, если $yS^{-1}x$ тогда и только тогда, когда xSy.
$S^{-1} \subset У \times X$.
S и S^{-1} называются **взаимно обратными.**

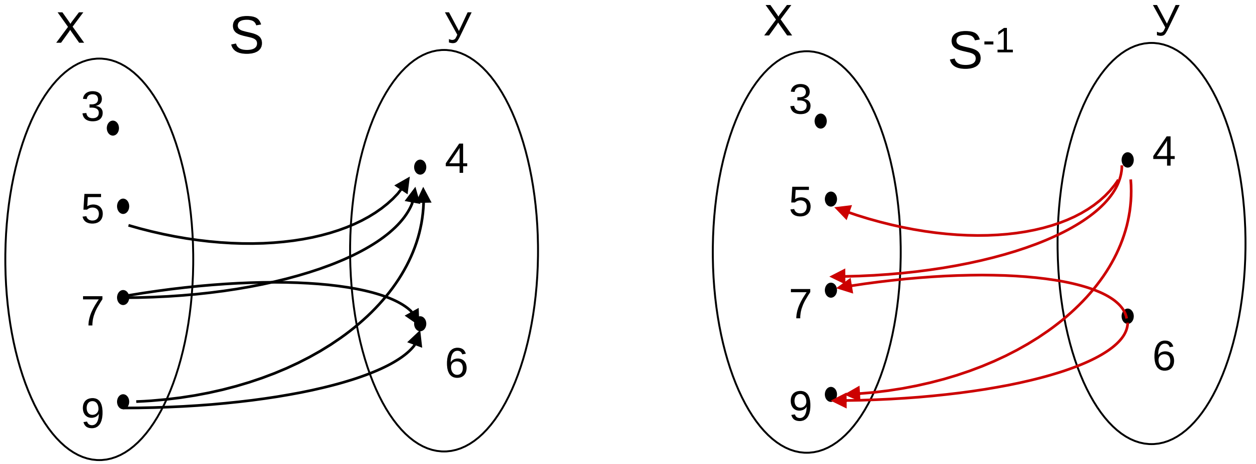
Пример: X = {3, 5, 7, 9}, У = {4, 6}, S: «больше».

1) S: «x больше y», где $x \in X$, $y \in У$ или S: «x > y».
S^{-1}: «y меньше x», или S^{-1}: «y < x».

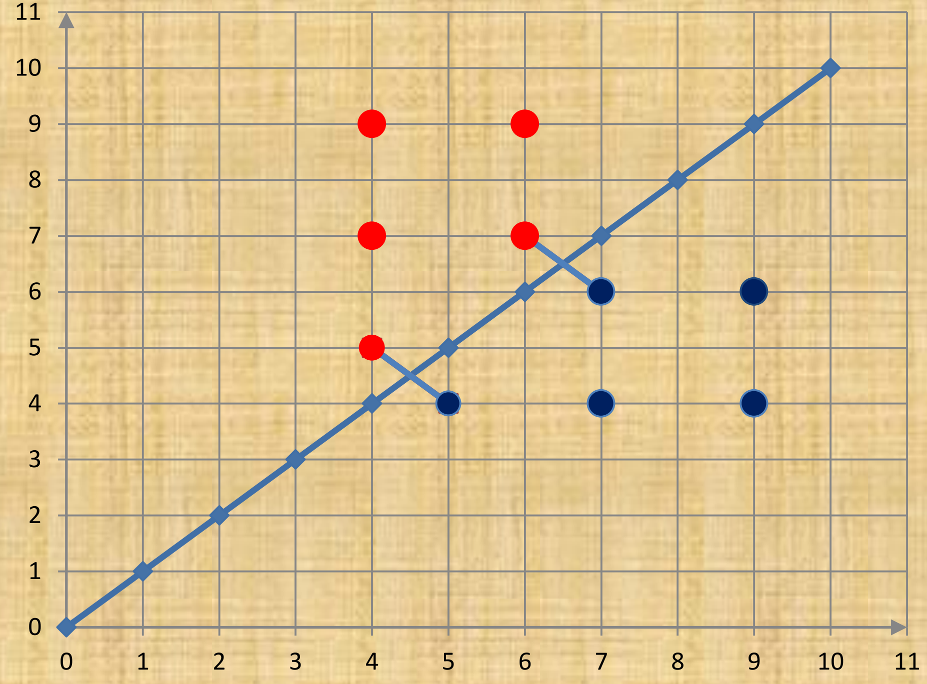
2) $S = \{(5;4), (7;4), (9;4), (7;6), (9;6)\}$.

$S^{-1} = \{(4;5), (4;7), (4;9), (6;7), (6;9)\}$.

3) **Графы**

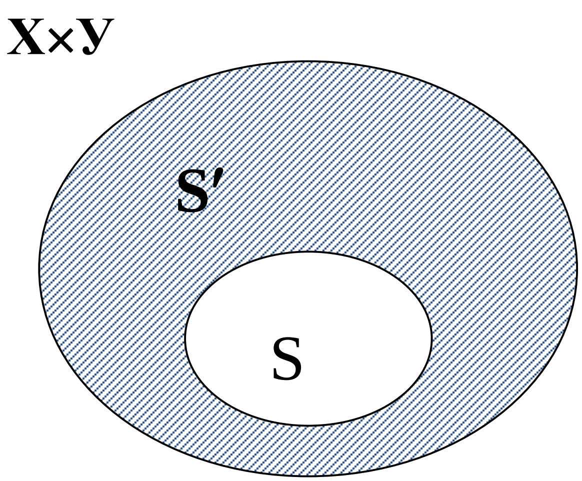


Графы взаимно обратных соответствий отличаются друг от друга *направлением стрелок*.



Графики взаимно обратных соответствий симметричны относительно биссектрисы 1-го и 3-го координатного угла (y = x).

Пусть S – соответствие между элементами множеств Х и У. Соответствие S′ между элементами множеств Х и У называется **противоположным данному**, если оно является дополнением множества S до множества Х×У

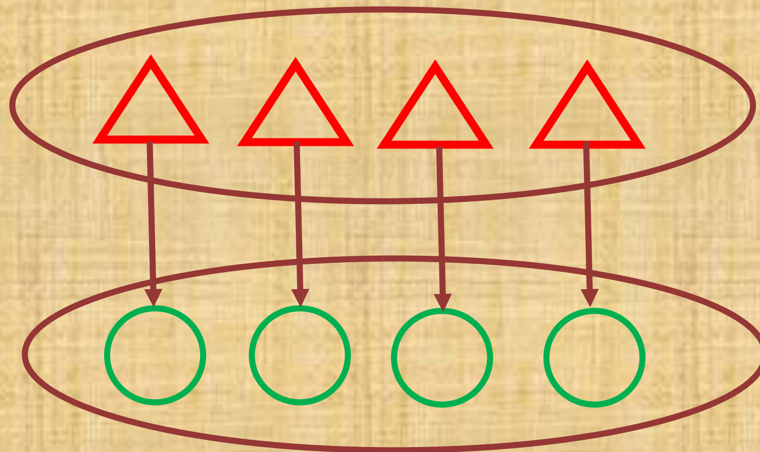


Пример: Х = {3, 5, 7, 9}, У = {4, 6},
S: «больше» или S: «x > y»
S = {(5;4), (7;4), (9;4), (7;6), (9;6)}.

S′: «не больше» или S′: «x ≤ y».
S′ = {(3;4), (3;6), (5;6)}.

Х×У = {(3;4), (3;6), (5;4), (5;6), (7;4), (7;6), (9;4), (9;6)}.

Определение. Взаимно однозначным **соответствием между множеством *X* и *Y* называется такое соответствие, при котором каждому элементу множества X соответствует единственный элемент множества У (и наоборот).**



Данное соответствие взаимно однозначное, т.к. каждому △ соответствует единственный ○

Определение. **Множества X и Y называются равномощными, если между элементами можно установить взаимно однозначное соответствие.**

Обозначение. $X \sim Y$

Свойства отношения равномощности:

- **Рефлексивно: каждое множество равномощно самому себе.**
- **Симметрично: Х~У ⇒ У~Х**
- **Транзитивно:** $X \sim Y$ **и** $Y \sim P \Rightarrow X \sim P$

Так как отношение равномощности рефлексивно, симметрично, транзитивно, то оно является отношением эквивалентности.

Отношение эквивалентности

Отношение R на множестве X называется **отношением эквивалентности**, если оно ***рефлексивно, симметрично*** и ***транзитивно***.

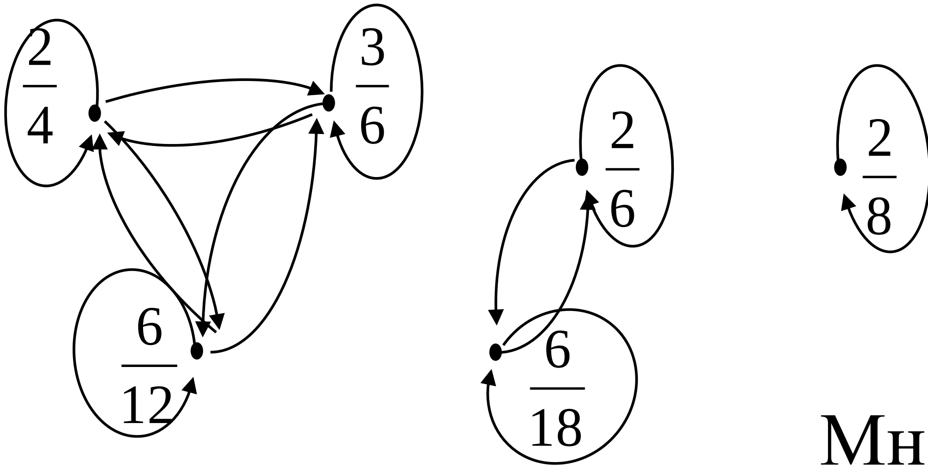
Примеры: 1. Отношение равенства на множестве дробей.

2. Отношение равенства на множестве геометрических фигур.

3. Отношение параллельности на множестве прямых.

Рассмотрим множество X = $\left\{\frac{2}{4}, \frac{2}{6}, \frac{2}{8}, \frac{6}{12}, \frac{6}{18}, \frac{3}{6}\right\}$

На X задано отношение R: «равно».



Множество X разбилось на три подмножества:

$$X_1 = \left\{\frac{2}{4},\ \frac{6}{12},\ \frac{3}{6}\right\} \quad X_2 = \left\{\frac{2}{6}, \frac{6}{18}\right\} \quad X_3 = \left\{\frac{2}{8}\right\}$$

Если на множестве X задано *отношение эквивалентности*, то оно порождает *разбиение* этого множества *на попарно непересекающиеся подмножества* (*классы эквивалентности*).

Обратно: если какое-либо отношение, заданное на множестве X, порождает *разбиение* этого множества *на классы*, то оно является *отношением эквивалентности*.

Пример: $X = \{x \mid x \in \mathrm{N}, x \le 15\}$.
R: «*иметь один и тот же остаток при делении на* 4».

Это *отношение порождает разбиение множества X на классы*:

$$X_0 = \{4, 8, 12\},$$
$$X_1 = \{1, 5, 9, 13\},$$
$$X_2 = \{2, 6, 10, 14\},$$
$$X_3 = \{3, 7, 11, 15\}.$$

Таким образом, заданное отношение *является отношением эквивалентности*.

Отношение порядка

Отношение R на множестве X называется **отношением порядка**, если оно ***транзитивно*** и ***антисимметрично***

Примеры: 1. Отношения «меньше», «больше» на множестве чисел.

2. Отношение «длиннее», «короче» на множестве отрезков.

Различают отношения строго порядка и нестрогого порядка.

Отношение **строгого порядка** определено выше.

Отношение **нестрогого порядка**, кроме названных свойств, обладает еще и свойством ***рефлексивности***.

Примеры: 1. «больше или равно» ($\geq$), «меньше или равно» ($\leq$) на числовом множестве.

2. «быть делителем» на множестве **N**.

Множество X с заданным на нем отношением порядка называется **упорядоченным** множеством.

Пример: Если на множестве **N** задать отношение «меньше» (или «больше»), то множество **N** будет упорядоченным.

1. Отношение Р: «число х на 3 больше числа у» задано на множестве X={0,3,4,6,7}.

a) Перечислить все пары множества А, находящиеся в заданном отношении
b) Построить граф отношения Р
c) Определите свойства заданного отношения

2.Множества X = {1,3,4,6} и Y = {0,1} находятся в соответствии S = {(1,1), (3,0), (3,1), (4,0), (4,1), (6,1)}. Задайте соответствие S^{-1}, обратное соответствию S, и постройте на разных чертежах их графики.