Лабораторная работа № 5

Специальные задачи линейного программирования.
Задачи о назначении и коммивояжера.

Цель работы – приобретение навыков построения математических моделей задач о назначении и коммивояжера и решения этих задач в Microsoft Excel.

ЧАСТЬ 1. ЗАДАЧА О НАЗНАЧЕНИИ

Основные сведения

Задача о назначениях – это РЗ, в которой для выполнения каждой работы требуется один и только один ресурс (один человек, одна автомашина и т.д.), а каждый ресурс может быть использован на одной и только одной работе. То есть ресурсы не делимы между работами, а работы не делимы между ресурсами. Таким образом, задача о назначениях является частным случаем ТЗ. Задача о назначениях имеет место при назначении людей на должности или работы, автомашин на маршруты, водителей на машины, при распределении групп по аудиториям, научных тем по научно-исследовательским лабораториям и т.п.

Исходные параметры модели задачи о назначениях

1. n – количество ресурсов, m – количество работ.

2. $a_i = 1$ – единичное количество ресурса A_i ($i = \overline{1,n}$), например: один работник; одно транспортное средство; одна научная тема и т.д.

3. $b_j = 1$ – единичное количество работы B_j ($j = \overline{1,m}$), например: одна должность; один маршрут; одна лаборатория.

4. c_{ij} – характеристика качества выполнения работы B_j с помощью ресурса A_i. Например, компетентность i-го работника при работе на j-й должности; время, за которое i-е транспортное средство перевезет груз по j-му маршруту; степень квалификации i-й лаборатории при работе над j-й научной темой.

Искомые параметры

1. x_{ij} – факт назначения или неназначения ресурса A_i на работу B_j:

$$x_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ если } i\text{-й ресурс не назначен на } j\text{-ю работу,} \\ 1, \text{ если } i\text{-й ресурс назначен на } j\text{-ю работу.} \end{cases}$$

2. $L(X)$ – общая (суммарная) характеристика качества распределения ресурсов по работам.

Специфическая структура задачи о назначениях позволила разработать так называемый **"Венгерский метод"** ее решения. Поэтому, хотя в Excel такие задачи решаются обычным симплекс-методом, в лабораторной работе требуется построить модель задачи о назначениях вида (1). В некоторых случаях, например, когда c_{ij} – это компетентность, опыт работы, или квалификация работников, условие задачи может требовать максимизации ЦФ, в отличие от (1). В этом случае ЦФ $L(X)$ заменяют на $L_1(X) = -L(X)$ и решают задачу с ЦФ $L_1(X) \to \min$, что равносильно решению задачи с ЦФ $L(X) \to \max$.

Таблица 1

Общий вид транспортной матрицы задачи о назначениях

Ресурсы, A_i	Работы, B_j				Количество ресурсов
	B_1	B_2	…	B_m	
A_1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1m}	1
A_2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2m}	1
…	…	…	…	…	…
A_n	c_{n1}	c_{n2}	…	c_{nm}	1
Количество работ	1	1	…	1	$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j$

Модель задачи о назначениях

$$L(X) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij} \to \min;$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1 \; \left(i = \overline{1,n}\right), \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \left(j = \overline{1,m}\right), \\ x_{ij} = \begin{cases} 0, \\ 1, \end{cases} \left(i = \overline{1,n};\ \mathrm{j} = \overline{1,m}\right). \end{cases} \qquad (1)$$

Пример построения модели ТЗ

Отдел кадров предприятия устроил конкурсный набор специалистов на две вакантные должности. На эти новые места (НМ) претендуют 3 прежних сотрудника (ПС), уже работающие в других отделах, и 4 новых сотрудника (НС). Номера новых сотрудников, новых и прежних мест выбираются из табл. 2. Номера прежних мест являются номерами прежних сотрудников.

Отдел кадров оценил по десятибалльной шкале компетентность новых сотрудников (табл. 3) и прежних сотрудников (табл. 4) для работы и на новых местах, и на прежних местах (ПМ), то есть занимаемых прежними сотрудниками. Необходимо учесть, что руководство предприятия, во-первых, предпочитает, чтобы прежние сотрудники не претендовали на места друг друга, и, во-вторых, не намерено увольнять прежних сотрудников. Необходимо распределить сотрудников по должностям наилучшим образом.

Таблица 2

Номера сотрудников и мест их работы для конкретного варианта

Новые сотрудники (НС)	Места работы прежних сотрудников (ПМ)	Новые места (НМ)
1, 2, 7, 8	2, 4, 6	1, 3

Таблица 3

Компетентность новых сотрудников

	НМ1	НМ2	НМ3	НМ4	ПМ1	ПМ2	ПМ3	ПМ4	ПМ5	ПМ6
НС1	6	5	7	8	5	6	7	6	7	5
НС2	5	5	8	8	7	6	4	5	8	8
НС3	6	7	5	6	4	5	4	5	6	6
НС4	7	8	7	6	5	7	6	8	5	5
НС5	7	6	6	5	5	4	5	5	4	6
НС6	8	8	9	7	6	7	8	7	9	8
НС7	9	8	9	9	8	7	8	9	8	7
НС8	7	7	8	9	7	8	9	6	7	8

Таблица 4

Компетентность прежних сотрудников

	НМ1	НМ2	НМ3	НМ4	Занимаемое место
ПС1	7	6	6	7	7
ПС2	8	9	7	7	8
ПС3	6	5	6	6	6
ПС4	7	9	6	8	8
ПС5	8	7	8	8	7
ПС6	4	5	6	4	5

Решение.

На основе данных таблицы 3 выбираем необходимые данные из таблиц 3 и 4. Исходя из выбранных данных, составляем матрицу:

	НМ1	НМ3	ПМ2	ПМ4	ПМ6
НС1	6	7	6	6	5
НС2	5	8	6	5	8
НС7	9	9	7	9	7
НС8	7	8	8	6	8
ПС2	8	7	8	0	0
ПС4	7	6	0	8	0
ПС6	4	6	0	0	5

Математическая модель задачи.

<u>1) Переменные задачи.</u>

Ведем переменные x_{ij} принимающие два значения:
x_{ij}=0, если i-й претендент (P_i) не принимается на j-ю вакансию (V_j),

x_{ij}=1, если i-й претендент (P_i) принимается на вакансию (V_j),

где i=1,2,...7; j=1,2,...5.

<u>2) Ограничения на переменные задачи.</u>

Очевидно, что все переменные задачи неотрицательные и целые числа: $x_{ij} \geq 0$ и x_{ij} – целые.

Кроме того, так как каждый претендент может занять только одну вакансию и все вакансии должны быть заняты, должны удовлетворяться следующие ограничения:

$$\sum_{i=1}^{7} x_{ij} = 1,\ j=1,2,...7,\ \sum_{j=1}^{5} x_{ij} = 1,\ i=1,2,...5,$$

другими словами в матрице (x_{ij}) суммы элементов по каждой строке и суммы элементов по каждому столбцу должны быть равны единицам. Это условие означает, что выбор претендентов должен быть таким, чтобы в матрице (x_{ij}), представляющей решение задачи, было бы по одной единице в каждой строке и по одной единице в каждом столбце, остальные элементы матрицы должны равняться нулю.

<u>3) Целевая функция в задаче о назначениях.</u>

Необходимо выбрать претендентов так, чтобы суммарное число очков, набранное ими было бы максимальным. Суммарное число набранных очков вычисляется по формуле:

$$L(X) = \sum_{i-1}^{7} \sum_{j=1}^{5} x_{ij} c_{ij}\ ;$$

$$L(X)=c_{11}x_{11}+c_{12}x_{12}+...+c_{75}x_{75}=6x_{11}+7x_{12}+...+5x_{75};$$

Окончательная математическая модель задачи записывается так:

$$L(X) = \sum_{i-1}^{7} \sum_{j=1}^{5} x_{ij} c_{ij} \to \max,;$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{5} x_{ij} = 1\ \left(i = \overline{1,7}\right), \\ \sum_{i=1}^{7} x_{ij} = 1 \left(j = \overline{1,5}\right), \\ x_{ij} = \begin{cases} 0, \\ 1, \end{cases} \left(i = \overline{1,7};\ \mathrm{j} = \overline{1,5}\right). \end{cases}$$

Составим транспортную модель задачи о назначении, в которой требуется найти максимум целевой функции. Предварительно задачу о назначениях нужно сбалансировать. В рассматриваемом примере эта процедура выполняется добавлением двух столбцов (две фиктивные вакансии) с нулевыми результатами компетентности.

Претендент, P_i	Вакансии, V_j							Количество претендентов
	V_1 (НМ1)	V_2 (НМ3)	V_3 (ПМ2)	V_4 (ПМ4)	V_5 (ПМ6)	V_6 (МФ1)	V_7 (МФ2)	
P_1 (НС1)	6	7	6	6	5	0	0	1
P_2 (НС2)	5	8	6	5	8	0	0	1
P_3 (НС7)	9	9	7	9	7	0	0	1
P_4 (НС8)	7	8	8	6	8	0	0	1
P_5 (ПС2)	8	7	8	0	0	0	0	1
P_6 (ПС4)	7	6	0	8	0	0	0	1
P_7 (ПС6)	4	6	0	0	5	0	0	1
Количество вакансий	1	1	1	1	1	1	1	$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j$

Решение задачи в Excel.

Экранные формы, задание переменных, целевой функции, ограничений и граничных условий задачи представлены на рис.1, 2, и в табл.5.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	**Задача о назначении**										
2											
3	Претендент	Вакансии									
4		НМ1	НМ3	ПМ2	ПМ4	ПМ6	МФ1	МФ2			Сумма баллов
5	НС1	6	7	6	6	5	0	0			0
6	НС2	5	8	6	5	8	0	0			
7	НС7	9	9	7	9	7	0	0			
8	НС8	7	8	8	6	8	0	0			
9	ПС2	8	7	8	0	0	0	0			
10	ПС4	7	6	0	8	0	0	0			
11	ПС6	4	6	0	0	5	0	0			
12											
13											
14	Претендент	Вакансии									
15		НМ1	НМ3	ПМ2	ПМ4	ПМ6	МФ1	МФ2			
16	НС1								0		
17	НС2								0		
18	НС7								0		
19	НС8								0		
20	ПС2								0		
21	ПС4								0		
22	ПС6								0		
23		0	0	0	0	0	0	0			

Рис.1. Экранная форма задачи

Таблица 5

Формулы экранной формы задачи

Объект математической модели	Выражение в Excel
Переменные задачи	B5:H11
Формула в целевой ячейке K5	=СУММПРОИЗВ(B5:H11;B16:H22)
Ограничения по строкам в ячейках I16:I22	=СУММ(B16:H16) Копируем в диапазон I16:I22
Ограничения по столбцам в ячейках B23:H23	=СУММ(B16:B22) Копируем в диапазон B23:H23

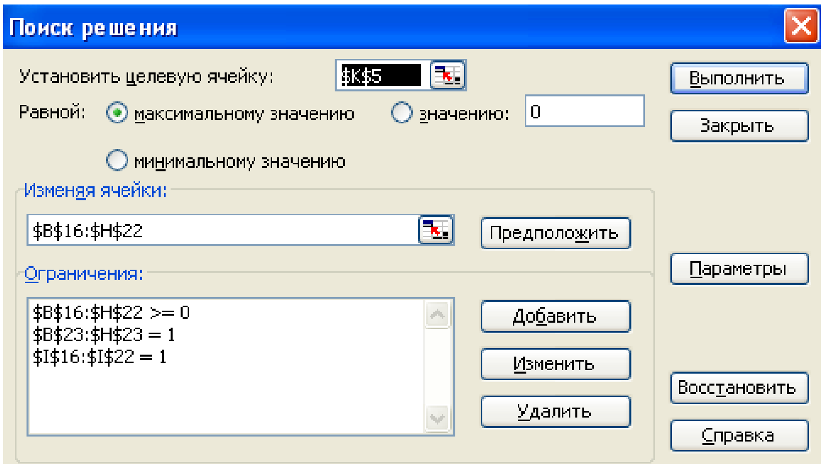
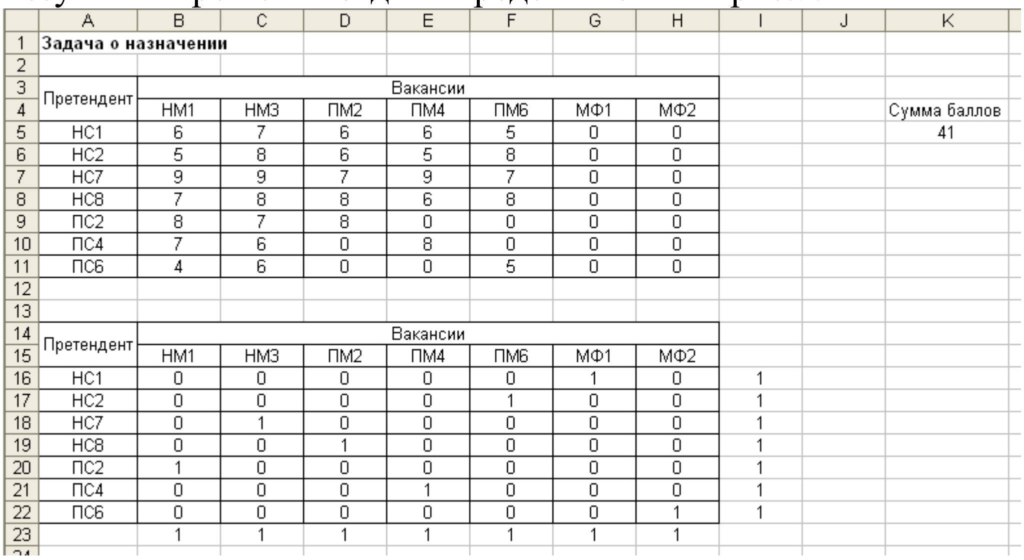


Рис.2. Ограничения и граничные условия задачи

В окне «Параметры» установить «Линейная модель», что соответствует решению задачи симплекс-методом.

Результаты решения задачи представлены на рис.3.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Задача о назначении										
2											
3	Претендент	Вакансии									
4		НМ1	НМ3	ПМ2	ПМ4	ПМ6	МФ1	МФ2			Сумма баллов
5	НС1	6	7	6	6	5	0	0			41
6	НС2	5	8	6	5	8	0	0			
7	НС7	9	9	7	9	7	0	0			
8	НС8	7	8	8	6	8	0	0			
9	ПС2	8	7	8	0	0	0	0			
10	ПС4	7	6	0	8	0	0	0			
11	ПС6	4	6	0	0	5	0	0			
12											
13											
14	Претендент	Вакансии									
15		НМ1	НМ3	ПМ2	ПМ4	ПМ6	МФ1	МФ2			
16	НС1	0	0	0	0	0	1	0	1		
17	НС2	0	0	0	0	1	0	0	1		
18	НС7	0	1	0	0	0	0	0	1		
19	НС8	0	0	1	0	0	0	0	1		
20	ПС2	1	0	0	0	0	0	0	1		
21	ПС4	0	0	0	1	0	0	0	1		
22	ПС6	0	0	0	0	0	0	1	1		
23		1	1	1	1	1	1	1			

Рис. 3. Результаты решения задачи

Получили оптимальное распределение. Возможно, оно не является единственным. Таким образом, наилучшее распределение работников по должностям имеет вид: НС1 не берут на работу, НС2 на ПМ6, НС7 на НМ3, НС8 на ПМ2, ПС2 на НМ1, ПС4 на ПМ4, ПС6 не берут.

Порядок выполнения работы

1. Согласно номеру своего варианта выберите условие задачи.
2. Постройте модель задачи, включая транспортную таблицу.
3. Найдите оптимальное решение задачи с помощью Excel и представьте его преподавателю.

Варианты заданий

Отдел кадров предприятия устроил конкурсный набор специалистов на две вакантные должности. На эти новые места (НМ) претендуют 3 прежних сотрудника (ПС), уже работающие в других отделах, и 4 новых сотрудника (НС). Номера новых сотрудников, новых и прежних мест выбираются по вариантам из табл.6. Номера прежних мест являются номерами прежних сотрудников. Отдел кадров оценил по десятибалльной шкале компетентность новых сотрудников (табл.7) и прежних сотрудников (табл.8) для работы и на новых местах, и на прежних местах (ПМ), то есть занимаемых прежними сотрудниками. Необходимо учесть, что руководство предприятия предпочитает, чтобы прежние сотрудники не претендовали на места друг друга. Необходимо распределить сотрудников по должностям наилучшим образом.

Таблица 6

Номера сотрудников и мест их работы для конкретного варианта

№ варианта	Новые сотрудники (НС)	Места работы прежних сотрудников (ПМ)	Новые места (НМ)
1	3, 4, 7, 8	1, 2, 3	1, 2
2	1, 2, 5, 6	2, 5, 6	2, 3
3	5, 6, 7, 8	1, 2, 5	3, 4
4	3, 4, 5, 6	4, 5, 6	1, 4
5	1, 2, 3, 4	2, 3, 4	2, 4
6	2, 4, 6, 8	3, 4, 6	1, 3
7	1, 3, 5, 7	2, 3, 6	1, 4
8	2, 3, 6, 7	3, 4, 5	2, 3
9	1, 4, 5, 8	2, 3, 5	3, 4
10	2, 3, 4, 5	1, 2, 6	1, 2
11	1, 2, 5, 7	1,2,5	2,3
12	1, 3, 5, 7	4, 5, 6	1, 3

Таблица 7

Компетентность новых сотрудников

	НМ1	НМ2	НМ3	НМ4	ПМ1	ПМ2	ПМ3	ПМ4	ПМ5	ПМ6
НС1	6	5	7	6	5	6	7	6	7	5
НС2	5	5	8	8	7	6	4	5	8	8
НС3	6	7	5	6	4	5	4	5	6	6
НС4	7	8	7	6	5	7	6	8	5	5
НС5	7	6	6	5	5	4	5	5	4	6
НС6	8	8	9	7	6	7	8	7	9	8
НС7	9	8	9	9	8	7	8	9	8	7
НС8	7	7	8	9	7	8	9	6	7	8

Таблица 8

Компетентность прежних сотрудников

	НМ1	НМ2	НМ3	НМ4	Занимаемое место
ПС1	7	6	6	7	7
ПС2	8	9	7	7	8
ПС3	6	5	6	6	6
ПС4	7	9	6	8	8
ПС5	8	7	8	8	7
ПС6	4	5	6	4	5

Контрольные вопросы

1. Какова постановка задачи о назначениях?
2. В чем отличие модели задачи о назначениях от модели ТЗ?
3. Каковы исходные и искомые параметры задачи о назначениях?
4. Запишите математическую модель задачи о назначениях.
5. Как записать модель задачи о назначениях, подразумевающую максимизацию ЦФ?
6. Каким образом в модели задачи о назначениях можно запретить конкретное назначение?
7. В чем особенности процесса приведения задачи о назначениях к сбалансированному виду?

ЧАСТЬ 2. ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА

Основные сведения

К задачам с булевыми переменными относятся задачи, переменные в которых могут принимать только два значения: 0 или 1. К таким задачам относится задача коммивояжера. Рассмотрим постановку задачи коммивояжера.

Имеется n городов. Расстояния между любой парой городов i и j известны и составляют c_{ij} . Коммивояжер выезжает из какого-либо города и должен посетить все города, побывав в каждом только один раз и вернуться в исходный город. Ставится задача определить такую последовательность объезда городов, или маршрут, при которой суммарная длина маршрута была бы минимальной.

Математическая модель.

Определим булевы переменные задачи: x_{ij} = 1, если коммивояжер переезжает из города i в город j, и x_{ij} = 0, если коммивояжер не переезжает из города i в город j.

Тогда задача заключается в определении минимума целевой функции

$$L(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min,$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = \overline{1,n}$$ – только один въезд в город j,

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = \overline{1,n}$$ – только один выезд из города i.

В задаче коммивояжера необходимо еще одно условие, а именно:

$$u_i - u_j + (n-1)x_{ij} \le n-2, \; i \ne j, \; i, j = 2,\dots, n.$$

Это специальное условие обеспечивает устранение нескольких несвязанных между собой маршрутов и циклов, попросту означающих перемещение коммивояжера по замкнутому частичному маршруту.

Пример

Рассмотрим задачу:

$$\begin{pmatrix} \infty & 7 & 2 & 9 & 7 \\ 5 & \infty & 3 & 9 & 1 \\ 4 & 8 & \infty & 5 & 3 \\ 5 & 6 & 4 & \infty & 7 \\ 7 & 6 & 3 & 7 & \infty \end{pmatrix}$$

Решение:

1. В ячейки B13:F17 вводим матрицу расстояний.

2. Вводим формулы

Ячейка	Формула	Примечание
B9	=СУММ(B4:B8)	Копируем в диапазон B9:F9
G4	=СУММ(B4:F4)	Копируем в диапазон G4:G8
C19	=СУММПРОИЗВ(B4:F8;B13:F17)	Целевая функция
E19	=B4+C5+D6+E7+F8	Исключение пути $i \to i$
B23	=$C$10–C10+4*C5	Копируем в диапазон B23:E23
B24	=$D$10–C10+4*C6	Копируем в диапазон B24:E24
B25	=$E$10–C10+4*C7	Копируем в диапазон B25:E25
B26	=$F$10–C10+4*C8	Копируем в диапазон B26:E26

Исходные данные приведены на рис.4.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА**							
2	***Матрица переменных***							
3		1	2	3	4	5	*Ограничения*	
4	1						0	
5	2						0	
6	3						0	
7	4						0	
8	5						0	
9	*Ограничения*	0	0	0	0	0		
10	*Переменные u*							
11	***Матрица расстояний***							
12		1	2	3	4	5		
13	1	10000	7	2	9	7		
14	2	5	10000	3	9	1		
15	3	4	8	10000	5	3		
16	4	5	6	4	10000	7		
17	5	7	6	3	7	10000		
18								
19	***Целевая функция***		0		0	*исключение пути*		
20								
21	***Дополнительные ограничения***							
22		*2*	*3*	*4*	*5*			
23	*2*	0	0	0	0			
24	*3*	0	0	0	0			
25	*4*	0	0	0	0			
26	*5*	0	0	0	0			
27								

Рис. 4. Исходные данные задачи

3. Сценарий решения:

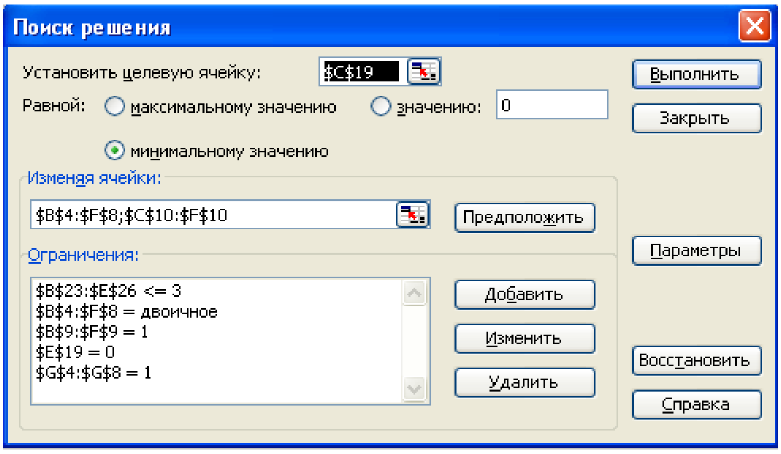


Рис.5. Окно Поиск решения.

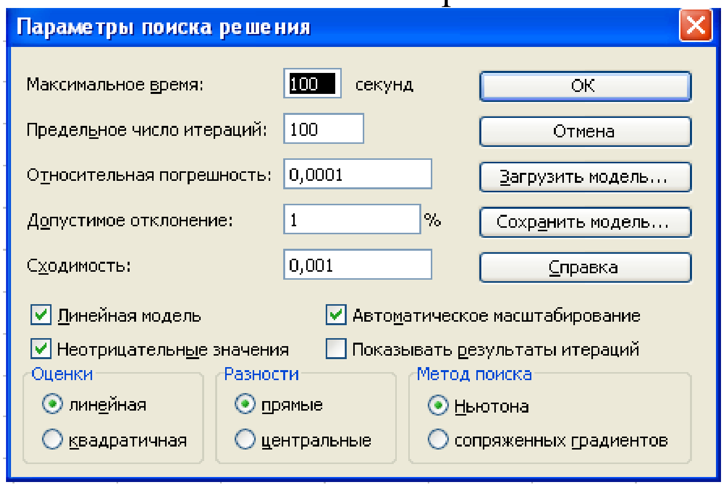


Рис. 6. Параметры Поиска решения.

4. Он приводит к следующим результатам:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА**							
2	***Матрица переменных***							
3		1	2	3	4	5	*Ограничения*	
4	1	0	0	1	0	0	1	
5	2	0	0	0	0	1	1	
6	3	0	0	0	1	0	1	
7	4	0	1	0	0	0	1	
8	5	1	0	0	0	0	1	
9	*Ограничения*	1	1	1	1	1		
10	*Переменные u*		2	0	1	3		
11	***Матрица расстояний***							
12		1	2	3	4	5		
13	1	10000	7	2	9	7		
14	2	5	10000	3	9	1		
15	3	4	8	10000	5	3		
16	4	5	6	4	10000	7		
17	5	7	6	3	7	10000		
18								
19	***Целевая функция***		21		0	*исключение пути*		
20								
21	***Дополнительные ограничения***							
22		*2*	*3*	*4*	*5*			
23	*2*	0	2	1	3			
24	*3*	-2	0	3	-3			
25	*4*	3	1	0	-2			
26	*5*	1	3	2	0			
27								

Рис. 7. Результаты решения задачи коммивояжера

5. Ответ: маршрут 1–3–4–2–5–1. Длина маршрута – 21.

Порядок выполнения работы

1. Изучить решение предлагаемой задачи коммивояжера.
2. В соответствии с вариантом задания, определенным преподавателем, составить математическую модель задачи и найти решение.

Варианты заданий

Для матрицы расстояний

$$\begin{pmatrix} \infty & a & b & c & d \\ e & \infty & f & g & h \\ k & m & \infty & n & p \\ q & r & s & \infty & t \\ x & y & z & w & \infty \end{pmatrix}$$

решить задачу коммивояжера.

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*k*	*m*	*n*	*p*	*q*	*r*	*s*	*t*	*x*	*y*	*z*	*w*
1)	9	4	2	9	5	7	2	1	4	3	7	3	1	6	7	1	4	4	7	6
2)	8	9	1	3	5	7	4	8	6	7	4	2	4	7	1	4	1	3	5	5
3)	5	5	4	4	4	3	8	3	2	4	6	1	2	7	5	6	5	9	3	4
4)	2	6	9	3	3	2	2	4	8	6	1	7	5	7	7	2	9	2	7	1
5)	1	8	5	3	1	5	9	5	8	7	8	9	5	8	6	1	5	4	9	4
6)	7	7	5	1	8	7	4	2	9	7	8	2	5	6	9	1	6	2	4	3
7)	7	1	8	1	9	2	5	9	8	8	6	9	2	7	2	7	6	3	4	1
8)	6	6	6	8	8	5	2	9	8	1	8	7	9	4	3	4	1	1	1	7
9)	7	7	9	3	8	6	4	6	3	8	5	8	7	3	4	5	8	9	9	5
10)	1	2	7	4	2	8	2	3	1	4	4	7	3	1	6	2	7	5	2	8
11)	8	2	5	6	9	1	6	2	4	3	9	7	8	2	5	6	9	1	6	2
12)	8	5	3	1	5	9	5	8	7	8	9	1	2	7	5	6	5	9	3	4

Контрольные вопросы

1. Какова постановка задачи коммивояжера?
2. Каковы исходные и искомые параметры задачи коммивояжера?
3. Запишите математическую модель задачи коммивояжера.