Игровые модели и принятие решений.

Цель работы – ознакомиться с методами решения задач матричных игр.

Основные сведения

Игрой называется идеализированная математическая модель конфликтной ситуации. Стороны, участвующие в конфликте называются *игроками*, а исход конфликта – *выигрышем*. Регулярное действие, выполняемое игроком, называется *ходом*. Совокупность ходов игрока, совершаемых им для достижения цели игры, называется *стратегией*.

Матричная игра – это конечная игра двух игроков с нулевой суммой, в которой задаётся выигрыш игрока 1 в виде матрицы (строка матрицы соответствует номеру применяемой стратегии игрока 1, столбец – номеру применяемой стратегии игрока 2; на пересечении строки и столбца матрицы находится выигрыш игрока 1, соответствующий применяемым стратегиям).

Решение матричных игр в чистых стратегиях

Пусть первый игрок имеет m стратегий, второй n стратегий. Обозначим через A_i – i-ую стратегию игрока 1 $(i=1,\ldots,m)$, через B_j – j-ую стратегию игрока 2 $(j=1,\ldots,n)$. Паре стратегий (i,j) поставим в соответствие число a_{ij} - выигрыш игрока 1 за счёт игрока 2, если первый игрок примет свою стратегию i, а второй – j.

В общем виде матричная игра может быть записана следующей матрицей, которая называется платёжной или матрицей выигрышей.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & \ldots & B_n \end{array} \\ \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ \\ A_m \end{array} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$

Каждая стратегия i, j называется *чистой стратегией*.

Для того чтобы найти решение игры, следует для каждого игрока найти стратегию, которой называется *оптимальной*. Для первого это стратегия, которая приносит максимальный выигрыш, если второй придерживается своей. В то же время для второго – это стратегия, которая приносит минимальный проигрыш, если первый придерживается своей.

Каждый из игроков стремится максимизировать свой выигрыш с учётом поведения противодействующего ему игрока.

Игрок 1 для каждого i выбирает минимальное значение выигрыша (при любых стратегий игрока 2) ,т.е.

$$\min_j a_{ij} \quad (i=1,\ldots,m).$$

Затем отыскивается такая стратегия $i = i_0$, при которой этот минимальный выигрыш будет максимальным, т.е.

$$\max_i \min_j a_{i\,j} = a_{i_0 j_0} = v_н .$$

Величина $v_н$ называется *максимином* матрицы или *нижней ценой игры*. Нижняя чистая цена игры показывает какой минимальный выигрыш может гарантировать себе игрок 1, применяя свои чистые стратегии при всевозможных действиях игрока 2.

Стратегия игрока 2 максимально уменьшить выигрыш игрока 1 (за счёт своих стратегий). Поэтому для игрока 2 необходимо определить значение

$$\min_j \max_i a_{i\,j} = a_{i_1\,j_1} = v_в .$$

Или найти максимальные значения по каждому из столбцов платёжной матрицы, а затем определить минимальное из этих значений. Величина $v_в$ называется *минимаксом* матрицы или *чистой верхней ценой игры*.

Таким образом, игрок 1 может обеспечить себе выигрыш не менее $v_н$, а игрок 2 может не допустить выигрыш игрока 1 больше чем на $v_в$.

В случае, если значения $v_н$ и $v_в$ не совпадают, при сохранении правил игры (коэффициентов a_{ij}) в длительной перспективе, выбор стратегий каждым из игроков оказывается неустойчивым. Устойчивость он приобретает лишь при равенстве $v_н = v_в = v$. В этом случае говорят, что игра имеет *решение в чистых стратегиях*, а стратегии i_0, j_0, в которых достигается v – *оптимальными чистыми стратегиями*. Пара чистых стратегий i_0, j_0 называется *седловой точкой*. Седловой элемент $a_{i_0 j_0}$ является минимальным в $i-$ой строке и максимальным в $j-$ом столбце платёжной матрицы. Значение v называется *чистой ценой игры*.

Пример. Найти решение игры, заданной платёжной матрицей A в чистых стратегиях.

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 4 \\ 1 & 8 & 3 \\ 8 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Решение: Найдём минимальные элементы в каждой строке и максимальные элементы в каждом столбце. Затем найдём максимальный элемент среди минимальных и минимальный среди максимальных.

	B_1	B_2	B_3	$\min\limits_j$
A_1	7	5	4	$\boxed{4}$
A_2	1	8	3	1
A_3	8	1	2	1
$\max\limits_i$	8	8	$\boxed{4}$	

$$\max_i \min_j a_{ij} = v_н = 4$$

$$\min_j \max_i a_{ij} = v_в = 4$$

В нашей задаче $v_н = v_в = v = 4$. Пара $(i_0 = 1, j_0 = 3)$ образует седловую точку. Таким образом, оптимальной стратегией для игрока 1 будет стратегия A_1, а для игрока 2 – стратегия B_3. Цена игры $v = 4$.

Уменьшение порядка платёжной матрицы.

Важным приёмом, позволяющем уменьшить размеры платёжной матрицы, является так называемое *правило доминирования*. Оно основано на отбрасывании тех чистых стратегий, которые не вносят никакого вклада в искомые оптимальные стратегии.

Один из приёмов снижения размеров матрицы заключается в сравнении её строк и столбцов.

Стратегия A_i называется *доминируемой* стратегией A_j, а стратегия A_j – *доминирующей*, если при любом варианте поведения противодействующего игрока выполняются неравенства

$$a_{i1} \le a_{j1}, a_{i2} \le a_{j2}, a_{i3} \le a_{j3}, \ldots, a_{im} \le a_{jm}.$$

Считают, что игрок поступает разумно, если будет избегать доминируемых стратегий.

В случае, если выполняется соотношение

$$a_{i1} = a_{j1}, a_{i2} = a_{j2}, a_{i3} = a_{j3}, \ldots, a_{im} = a_{jm},$$

то говорят, что стратегии A_i и A_j дублируют друг друга.

Если в матрице игры одна из строк (столбцов) доминирует другую строку (другой столбец) или две строки (два столбца) дублируют друг друга, то можно уменьшить размеры матрицы путём исключения доминируемых строк (столбцов) и одной (одного) из дублирующих.

Пример. Заменить исходную матрицу выигрышей на матрицу меньших размеров.

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 & B_6 \end{array} \\ \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 7 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 5 & 7 \\ 3 & 3 & 0 & 3 & 6 & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Решение:

Стратегия A_1 является доминируемой стратегией A_3, стратегия B_1 является дублирующей по отношению к стратегии B_4. Данные стратегии не будут выбраны игроками, так как являются заведомо проигрышными. Получим платёжную матрицу

$$\begin{array}{c} \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} B_2 & B_3 & B_4 & B_5 & B_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 7 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 7 \\ 3 & 0 & 3 & 6 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

B_5 – доминируемая стратегией B_2.

$$\begin{array}{c} \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} B_2 & B_3 & B_4 & B_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 7 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Понятие о матричных играх со смешанным расширением.

Решения матричной игры начинается с нахождения её верхней и нижней цены. Если эти значения совпадают, и игра имеет седловую точку, то на этом решение игры завершается. Если же матричная игра не имеет решения в чистых стратегиях, то для нахождения её решения используются так называемые смешанные стратегии, а найденные ранее нижняя и верхняя цены игры указывают на то, что игрок 1 не должен надеяться на выигрыш больший, чем верхняя цена игры, и может быть уверен в получении выигрыша не меньше нижней цены игры. В этом случае оптимальный результат игры достигается путём применения чистых стратегий случайно, с определённой вероятностью.

Смешанной стратегией игрока называется полный набор вероятностей применения его чистых стратегий.

Стратегии, применённые с вероятностью, отличной от нуля, называются *активными стратегиями*.

Пусть игрок 1 имеет m чистых стратегий $A_1, A_2, A_3, ..., A_m$. Обозначим через $x_1, x_2, x_3, ..., x_m$ вероятности, с которыми игрок 1 использует свои соответствующие чистые стратегии. Тогда смешанная стратегия игрока 1 – это набор чисел $x = (x_1, x_2, x_3, ..., x_m)$, удовлетворяющих соотношениям $x_i \geq 0 \;\; (i = 1, ..., m)$, $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$.

Обозначим через $y_1, y_2, y_3, ..., y_n$ вероятности, с которыми он использует свои чистые стратегии $B_1, B_2, ..., B_n$. Смешанная стратегия для игрока 2 – набор чисел $y=(y_1, y_{2,} y_3, ..., y_n)$, удовлетворяющих соотношениям $y_j \ge 0 \;\; (j=1,...,n)$, $\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$.

Для соблюдения секретности, каждый игрок применяет свои смешанные стратегии независимо от выбора другого игрока.

Доказано, что для всех игр со смешанным расширением существует оптимальная смешанная стратегия, значение выигрыша при выборе которой находится в интервале между нижней и верхней ценой игры:

$$v_н \le v \le v_в .$$

При этом условии величина v называется *ценой игры*.

Если x^* – оптимальная стратегия первого игрока, а y^* – оптимальная стратегия второго игрока, то число

$$v = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i^* y_j^*$$

является ценой игры.

Определение оптимальных стратегий для обоих игроков и цены игры и составляет *процесс нахождения решения игры*.

И для того чтобы число v было ценой игры, а x^* и y^* – оптимальными стратегиями необходимо и достаточно выполнение неравенств

$$\sum_{i=1}^{m} a_{i\,j} x_i^* \ge v \quad (j=1,...,n) \quad и \quad \sum_{j=1}^{n} a_{i\,j} y_j^* \le v \quad (i=1,...,m).$$

Графическое решение матричных игр.

Графический метод применим к тем играм, в которых хотя бы один из игроков имеет две стратегии.

Рассмотрим игру 2х*n*, представленную в таблице 1. Эта игра не имеет седловой точки.

Таблица 1

	B_1	B_2	…	B_k	…	B_n	Вероятности использования чистых стратегий игроком *A*
A_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1k}	…	a_{1n}	$x_1=p$
A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2k}	…	a_{2n}	$x_2=1-p$
Вероятности использования чистых стратегий игроком *B*	y_1	y_2	…	y_k	…	y_n	

Построим графики прямых

$$w_k = a_{1k}p + a_{2k}(1-p) = (a_{1k} - a_{2k})p + a_{2k}$$

для каждого k=1,2,…, n в системе координат pOw. На каждой из построенных прямых определяются и отмечаются наименьшие значения полужирной ломаной линией. Эта линия огибает снизу все семейство построенных прямых и называется *нижней огибающей семейства* (рис. 1).

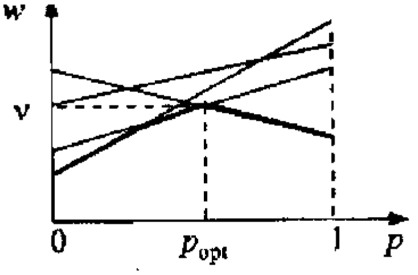

Рис. 1

Цену игры v определяет верхняя точка построенной нижней огибающей. Координаты этой точки являются оптимальной стратегией игрока A:

$$x=(p_{опт};(1-p_{опт})).$$

Пусть в наивысшей точке нижней огибающей пересекаются прямые w_k и w_l, при этом прямая w_k имеет положительный наклон, а прямая w_l – отрицательный. Оптимальная смешанная стратегия игрока B получается, если положить $y_k=q$, $y_l=1-q$, $y_j=0$ при $j\neq k,l$, где q находят из уравнения

$$a_{1k}q + a_{1l}(1-q) = a_{2k}q + a_{2l}(1-q).$$

Пример. Найти решение игры

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение:

Проведем анализ игры на наличие седловой точки. Нижняя цена игры равна –1, верхняя равна 1. Седловой точки нет. Решение надо искать в смешанных стратегиях.

Пусть $x=(x_1, x_2)$ – смешанная стратегия игрока 1, $y=(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6)$ – смешанная стратегия игрока 2.

Построим график нижней огибающей. Предварительно запишем уравнения прямых:

$$w_1 = 6p - 2(1-p) = 8p - 2;$$

$$w_2 = 4p - 1(1-p) = 5p - 1;$$

$$w_3 = 3p + (1-p) = 2p + 1;$$

$$w_4 = p + 0(1-p) = p;$$

$$w_5 = -p + 5(1-p) = -6p + 5;$$

$$w_6 = 0p + 4(1-p) = -4p + 4.$$

Графики данных прямых, построенных в системе координат pOw, представлены на рис. 2.

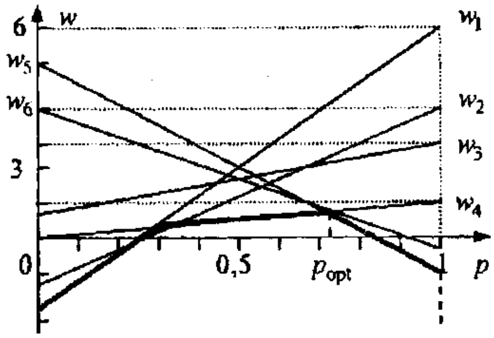

Рис. 2

Нижняя огибающая выделена на рис.2 полужирной ломаной линией. Точка максимума нижней огибающей лежит на пересечении прямых w_4 и w_5.

Составим систему с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} p = v, \\ -6p + 5 = v. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим $p_{опт}$=5/7. Цена игры, являющаяся математическим ожиданием выигрыша игрока A, равна v =5/7.

Оптимальная стратегия игрока A равна $x = \left(\frac{5}{7}; \frac{2}{7} \right)$.

Найдем оптимальную стратегию игрока B. В наивысшей точке нижней огибающей пересекаются прямые w_4 и w_5, при этом прямая w_4 имеет положительный наклон, а прямая w_5 – отрицательный. Тогда $y_4=q$, $y_5=1-q$, $y_j=0$ при $j\neq 4,5$, Составим уравнение:

$$q-(1-q)=0\cdot q+5(1-q);$$
$$7q=6.$$

Отсюда находим

$$q_{опт}=6/7.$$

Таким образом, оптимальная стратегия игрока B равна:

$$y = \left(0;0;0;\frac{6}{7};\frac{1}{7};0 \right).$$

Для решения игры mx2 также может быть применен графический метод.

Пример. Графически решить игру, заданную платёжной матрицей.

$$\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 6 \\ 3 & 5 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}.$$

Решение:

	B_1	B_2	Вероятности использования чистых стратегий игроком 1.
A_1	5	7	x_1
A_2	7	6	x_2
A_3	3	5	x_3
A_4	4	8	x_4
Вероятности использования чистых стратегий игроком 2	y_1=q	y_2 =1–q	$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$

В данном примере стратегия A_3 игрока 1 является доминируемой стратегиями A_2 и A_4, следовательно, можно исключить доминируемую строку и уменьшить платёжную матрицу в размерах (при этом вероятность использования игроком 1 своей чистой стратегии A_3 будет нулевая, x_3=0):

$$\begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 6 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} \end{array}$$

Проведем анализ игры на наличие седловой точки. Нижняя цена игры равна 6, верхняя равна 7. Седловой точки нет. Решение надо искать в смешанных стратегиях.

Пусть $x=(x_1, x_2, x_3, x_4)$ – смешанная стратегия игрока 1, $y=(y_1, y_2)$ – смешанная стратегия игрока 2.

Построим график верхней огибающей. Предварительно запишем уравнения прямых:

$$w_1 = 5q + 7(1-q) = -2q + 7;$$

$$w_2 = 7q + 6(1-q) = q + 6;$$

$$w_4 = 4q + 8(1-q) = -4q + 8$$

Графики данных прямых, построенных в системе координат qOw, представлены на рис. 3.

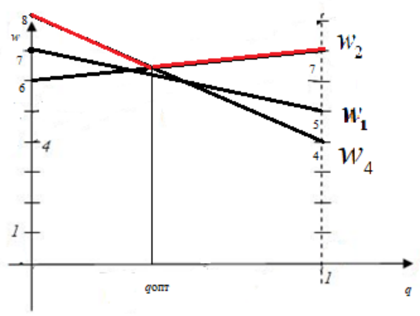

Рис. 3

Верхняя огибающая выделена на рис.3 полужирной ломаной линией. Точка минимума верхней огибающей лежит на пересечении прямых w_4 и w_2.

Составим систему с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} q+6=v, \\ -4q+8=v. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим $q_{опт}$=2/5.

Цена игры, равна v=32/5.

Оптимальная стратегия игрока *B* равна $y=\left(\frac{2}{5};\frac{3}{5}\right)$.

Найдем оптимальную стратегию игрока *A*. В наименьшей точке верхней огибающей пересекаются прямые w_2 и w_4, при этом прямая w_2 имеет положительный наклон, а прямая w_4 – отрицательный. Тогда $x_2=p$, $x_4=1-p$, $x_i=0$ при $i\neq2;4$. Составим уравнение:

$$7p+4(1-p)=6\cdot p+8(1-p);$$

$$5p=4.$$

Отсюда находим

$$p_{опт}=4/5.$$

Таким образом, оптимальная стратегия игрока *B* равна:

$$x=\left(0;\frac{4}{5};0;\frac{1}{5}\right).$$

Таким образом, решение игры $x^*=\left(0,\frac{4}{5},0,\frac{1}{5}\right)$, $y^*=\left(\frac{2}{5},\frac{3}{5}\right)$ и $v=\frac{32}{5}$.

Варианты заданий

Задание 1.

Исключите доминируемые и дублирующие стратегии. Определите нижнюю и верхнюю цены игры, а также названий стратегий, в которых достигаются эти значения. Определите наличия или отсутствия оптимальной чистой стратегии в игре.

	B1	B2	B3	B4	B5
A1	N	1	4	0	2
A2	2	0	5	N	3
A3	N+1	N	6	N+2	9
A4	1	0	2	0	8
A5	N^2	N	N	1	7

где *N* – номер варианта.

Задание 2. Рассмотрим две конкурирующие финансовые компании A и B. Компания B ведет переговоры с организаторами каждого из четырех проектов B_1, B_2 B_3, B_4 на предмет инвестирования. Задача компании B - положительный результат переговоров. Компания A ставит своей задачей свести переговоры компании В к отрицательному результату с тем, чтобы занять место компании В в инвестировании.

Компания А для достижения своей цели - срыва переговоров компании В, может применить одну из следующих стратегий:

A_1 - предложить организаторам проектов более выгодные для них условия инвестирования по сравнению с компанией В:

A_2 - убедить компанию В в нерентабельности проектов B_1, B_2 B_3, B_4;

A_3 - найти и предоставить компромат на компанию В.

Стратегии A_1, A_2, A_3 компании А приводят к отрицательному результату переговоров с вероятностями, заданными в таблице 2. Определить оптимальную стратегию для фирмы А.

Таблица 2

Вариант 1		B_1	B_2	B_3	B_4	Вариант 2		B_1	B_2	B_3	B_4
	A_1	0,7	0,5	0,3	0,1		A_1	0,3	0,4	0,6	0,4
	A_2	0,6	0,9	0,4	0,5		A_2	0,3	0,6	0,1	0,5
	A_3	0,8	0,6	0,2	0,1		A_3	0,3	0,6	0,4	0,5
Вариант 3		B_1	B_2	B_3	B_4	Вариант 4		B_1	B_2	B_3	B_4
	A_1	0,3	0,5	0,8	0,3		A_1	0,4	0,3	0,4	0,6
	A_2	0,6	0,6	0,8	0,1		A_2	0,4	0,8	0,4	0,8
	A_3	0,5	0,4	0,6	0,3		A_3	0,5	0,5	0,3	0,8
Вариант 5		B_1	B_2	B_3	B_4	Вариант 6		B_1	B_2	B_3	B_4
	A_1	0,1	0,2	0,4	0,6		A_1	0,75	0,31	0,69	0,45
	A_2	0,4	0,3	0,3	0,7		A_2	0,86	0,62	0,34	0,64
	A_3	0,1	0,2	0,4	0,6		A_3	0,36	0,15	0,66	0,45
Вариант 7		B_1	B_2	B_3	B_4	Вариант 8		B_1	B_2	B_3	B_4
	A_1	0,5	0,6	0,4	0,8		A_1	0,35	0,83	0,66	0,81
	A_2	0,5	0,7	0,6	0,4		A_2	0,54	0,63	0,56	0,48
	A_3	0,4	0,7	0,7	0,2		A_3	0,57	0,64	0,47	0,72
Вариант9		B_1	B_2	B_3	B_4	Вариант 10		B_1	B_2	B_3	B_4
	A_1	0,12	0,57	0,43	0,46		A_1	0,1	0,2	0,5	0,7
	A_2	0,56	0,32	0,48	0,48		A_2	0,5	0,6	0,3	0,2
	A_3	0,62	0,67	0,15	0,38		A_3	0,6	0,2	0,6	0,7

Задание 3. Фирма, с учетом возможных вариантов поведения партнера (стратегий B_j) разработала стратегии своей деятельности: A_i. Прибыль фирмы a_{ij} в ситуации, когда она выбирает свою стратегию A_i, а партнер – стратегию B_j, приведена в заданной платежной матрице.

Показать, что эта матрица не имеет седловой точки и найти оптимальное решение задачи в смешанных стратегиях графическим методом.

Вариант 1

7	8
4	9
8	1
3	5

Вариант 2

8	7	1	6
6	8	5	10

Вариант 3

9	6
5	4
6	10
5	4

Вариант 4

8	9
10	6
8	7
9	10

Вариант 5

8	1	8	10
3	9	7	7

Вариант 6

2	8
10	7
4	8
8	4

Вариант 7

8	3
2	4
4	2
5	6

Вариант 8

7	6	0	5
8	5	9	2

Вариант 9

6	8
4	9
4	7
5	6

Вариант 10

8	2	3	1
7	3	8	10