Модели оптимального распределения ресурсов

Цель работы - ознакомиться с основами построения математических моделей оптимального распределения ресурсов

Основные сведения

В общем виде задачи оптимального распределения ресурсов могут быть описаны следующим образом. Имеется некоторое количество ресурсов (материальные, трудовые, финансовые), которые необходимо распределить между различными объектами их использования по отдельным промежуткам планового периода так, чтобы получить максимальную суммарную эффективность от выбранного способа распределения.

Показателем эффективности может служить, например, прибыль, себестоимость, суммарные затраты и т.д.

Пусть C – объем ресурсов, которые необходимо распределить между различными объектами, причем эффективность работы каждого объекта оценивается с помощью функции $f_i(x_i)$, где x_i – количество ресурсов, выделяемых i-му объекту.

Обозначив суммарную эффективность z, получаем следующую задачу нелинейного программирования

Максимизировать

$$z=f_1(x_1)+f_1(x_1)+\ldots+f_n(x_n)$$

при условии, что

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=C,\ x_1,x_2,\ldots,x_n\geq 0,\ x_1,x_2,\ldots,x_n \text{ – целые.}$$

Элементы модели динамического программирования таковы.

1. *Этап i* ставится в соответствие i-му объекту, $i = 1,2,\ldots, n$.
2. *Вариантами решения* на i-м этапе описываются количеством x_i выделенных ресурсов i-му объекту.
3. *Состояние* на i-м этапе S_i выражает оставшиеся ресурсы.

Уравнения Беллмана

$$Z_k(S_{k-1})=\max_{x_k}\left\{F_k(S_{k-1},x_k)+Z_{k+1}(S_k)\right\}=\max_{0\leq x_k\leq S_{k-1}}\left\{f_k(x_k)+Z_{k+1}(S_{k-1}-x_k)\right\},$$

где $Z_{n+1}(S_n)=0$.

Пример. Между четырьмя предприятиями распределяются 60 млн. руб. Прирост выпуска продукции на каждом предприятии зависит от выделенной суммы средств x. Значения прироста задаются в виде таблицы $g_i(x)$, $i = 1, 2, 3, 4$. Найти такой план распределения 60 млн. руб. между предприятиями, при котором общий прирост выпуска продукции будет максимальным.

Средства x, млн. руб.	Прирост выпуска продукции, млн. руб.			
	$g_1(x)$	$g_2(x)$	$g_3(x)$	$g_4(x)$
0	0	0	0	0
20	7	6	14	14
40	23	23	21	20
60	31	30	34	35

Начальное состояние S_0 = 60 млн. руб. Разобьем весь процесс выделения средств предприятиям на 4 шага.

На 1-м шаге выделим x_1 млн. руб. 1-му предприятию. После этого останется $S_1 = S_0 - x_1$ млн. руб.

На 2-м шаге выделим x_2 млн. руб. 2-му предприятию. После этого останется $S_2 = S_1 - x_2$ млн. руб.

На 3-м шаге выделим x_3 млн. руб. 3-му предприятию. После этого останется $S_3 = S_2 - x_3$ млн. руб.

На 4-м шаге выделим x_4 млн. руб. 4-му предприятию.

Уравнения Беллмана

$$Z_k(S_{k-1}) = \max_{x_k}\left\{F_k(S_{k-1}, x_k) + Z_{k+1}(S_k)\right\} = \max_{0\le x_k \le S_{k-1}}\left\{g_k(x_k) + Z_{k+1}(S_{k-1} - x_k)\right\},$$

то есть на k-м шаге из оставшихся S_{k-1} средств надо выделить x_k средств k-му предприятию, чтобы прирост выпуска продукции на k-м и оставшихся предприятиях был максимальным.

Пусть $k = 4$. Тогда

$$Z_4(S_3) = \max_{0\le x_4 \le S_3}\left\{g_4(x_4)\right\}.$$

Заполним таблицу.

В столбце S_3 и строке x_4 указаны все возможные значения. Все оставшиеся перед 4-м шагом средства нужно выделить 4-му предприятию. Поэтому числа из столбца $g_4(x)$ исходной таблицы запишем в нашу таблицу в столбцы со 2-го по 5-й. В столбцах со 2-го по 5-й определяем максимум в каждой строке, и результат пишем в 6-й столбец. Те x_4, которым соответствуют числа из 6-го столбца, пишем в 7-й столбец.

1	2	3	4	5	6	7
S_3 \\ x_4	0	20	40	60	$Z_4(S_3)$	x_4^*
0	0				0	0
20		14			14	20
40			20		20	40
60				35	35	60

Пусть $k = 3$. Тогда

$$Z_3(S_2) = \max_{0\le x_3 \le S_2}\left\{g_3(x_3) + Z_4(S_2 - x_3)\right\}.$$

Определим оптимальную стратегию при распределении средств между 3-м и 4-м предприятиями. По первоначальной таблице и таблице при $k = 4$ заполним следующую таблицу.

В 1-м столбце указано, сколько средств осталось для 3-го и 4-го предприятий. В строке x_3 дана информация о том, сколько из этих оставшихся средств досталось 3-му предприятию. Поясним, как заполняются столбцы со 2-го по 5-й. В клетке (2, 2) (2-я строка, 2-й столбец) на долю 3-го и 4-го предприятий приходится $S_2 = 0$, из них на долю 3-го предприятия приходится $x_3 = 0$. Поэтому нужно сложить значения из исходной таблицы для $g_3(x)$ при x=0 (это 0) и из предпоследнего столбца предыдущей таблицы при $S_3 = S_2 - x_3 = 0 - 0 = 0$ (это 0), то есть 0 + 0 = 0.

В клетке (3, 2) (3-я строка, 2-й столбец) на долю 3-го и 4-го предприятий приходится $S_2 = 20$, из них на долю 3-го предприятия приходится $x_3 = 0$. Поэтому нужно сложить значения из исходной таблицы для $g_3(x)$ при $x = 0$ (это 0) и из предпоследнего столбца предыдущей таблицы при $S_3 = S_2 - x_3 = 20 - 0 = 20$ (это 14), то есть 0 + 14 = 14.

В клетке (5, 3) (5-я строка, 3-й столбец) на долю 3-го и 4-го предприятий приходится $S_2 = 60$, из них на долю 3-го предприятия приходится $x_3 = 20$. Поэтому нужно сложить значения из исходной таблицы для $g_3(x)$ при x = 20 (это 14) и из предпоследнего столбца предыдущей таблицы при $S_3 = S_2 - x_3 = 60 - 20 = 40$ (это 20), то есть 14 + 20 = 34. И т. д.

	1	2	3	4	5	6	7
1	S_2 \ x_3	0	20	40	60	$Z_3(S_2)$	x_3^*
2	0	0+0=0				0	0
3	20	0+14=14	14+0=14			14	0 или 20
4	40	0+20=20	14+14=28	21+0=21		28	20
5	60	0+35=35	14+20=34	21+14=35	34+0=34	35	0 или 40

В столбцах со 2-го по 5-й определяем максимум в каждой строке, и результат пишем в 6-й столбец. Те x_3, которым соответствуют числа из 6-го столбца, пишем в 7-й столбец.

Пусть k = 2. Тогда

$$Z_2(S_1) = \max_{0 \le x_2 \le S_1} \left\{ g_2(x_2) + Z_3(S_1 - x_2) \right\}.$$

Определим оптимальную стратегию при распределении средств между 2-м, 3-м и 4-м предприятиями. По первоначальной таблице и таблице при k = 3 заполним следующую таблицу.

	1	2	3	4	5	6	7
1	S_1 \ x_2	0	20	40	60	$Z_2(S_1)$	x_2^*
2	0	0+0=0				0	0
3	20	0+14=14	6+0=6			14	0
4	40	0+28=28	6+14=20	23+0=23		28	0
5	60	0+35=35	6+28=34	23+14=37	30+0=30	37	40

В 1-м столбце указано, сколько средств осталось для 2-го, 3-го и 4-го предприятий. В строке x_2 дана информация о том, сколько из этих оставшихся средств досталось 2-му предприятию. Поясним, как заполняются столбцы со 2-го по 5-й.

Например, в клетке (5, 4) (5-я строка, 4-й столбец) на долю 2-го, 3-го и 4-го предприятий приходится S_1 = 60, из них на долю 2-го предприятия приходится x_2 = 40. Поэтому нужно сложить значения из исходной таблицы для $g_2(x)$ при x = 40 (это 23) и из предпоследнего столбца предыдущей таблицы при $S_2 = S_1 - x_2 = 60 - 40 = 20$ (это 14), то есть 23 + 14 = 37. И т. д.

В столбцах со 2-го по 5-й определяем максимум в каждой строке, и результат пишем в 6-й столбец. Те x_2, которым соответствуют числа из 6-го столбца, пишем в 7-й столбец.

Пусть k = 1. Тогда

$$Z_1(S_0) = \max_{0 \le x_1 \le S_0} \left\{ g_1(x_1) + Z_2(S_0 - x_1) \right\}.$$

Определим оптимальную стратегию при распределении средств между предприятиями. По первоначальной таблице и таблице при k = 2 заполним следующую таблицу.

	1	2	3	4	5	6	7
1	S_0 \ x_1	0	20	40	60	$Z_1(S_0)$	x_1^*
2	0	0+0=0				0	0
3	20	0+14=14	7+0=7			14	0

4	40	0+28=28	7+14=21	23+0=23		28	0
5	60	0+37=37	7+28=35	23+14=37	31+0=31	37	0 или 40

В 1-м столбце указано общее количество средств. В строке x_1 дана информация о том, сколько из этих средств досталось 1-му предприятию. Поясним, как заполняются столбцы со 2-го по 5-й.

Например, в клетке (4, 3) (4-я строка, 3-й столбец) на долю предприятий приходится $S_0 = 40$, из них на долю 1-го предприятия приходится $x_1 = 20$. Поэтому нужно сложить значения из исходной таблицы для $g_1(x)$ при $x = 20$ (это 7) и из предпоследнего столбца предыдущей таблицы при $S_1 = S_0 - x_1 = 40 - 20 = 20$ (это 14), то есть $7 + 14 = 21$. И т. д.

В столбцах со 2-го по 5-й определяем максимум в каждой строке и результат пишем в 6-й столбец. Те x_1, которым соответствуют числа из 6-го столбца, пишем в 7-й столбец.

Максимальное значение $Z_1(S_0)$ (в 6-м столбце) равно 37 при $S_0 = 60$ и $x_1^* = 0$ или 40. Если $x_1^* = 0$, то $S_1 = S_0 - x_1^* = 60 - 0 = 60$.

Из таблицы при $k = 2$ и $S_1 = 60$ находим в последнем столбце $x_2^* = 40$. Тогда $S_2 = S_1 - x_2^* = 60 - 40 = 20$.

Из таблицы при $k = 3$ и $S_2 = 20$ находим в последнем столбце $x_3^* = 0$ или 20. Если $x_3^* = 0$, то $S_3 = S_2 - x_3^* = 20 - 0 = 20$.

Из таблицы при $k = 4$ и $S_3 = 20$ находим в последнем столбце $x_4^* = 20$.

Получен один оптимальный вариант распределения средств: $x_1^* = 0$, $x_2^* = 40$, $x_3^* = 0$, $x_4^* = 20$.

Если $x_3^* = 20$, то $S_3 = S_2 - x_3^* = 20 - 20 = 0$. Из таблицы при $k = 4$ и $S_3=0$ находим в последнем столбце $x_4^* = 0$.

Получен еще один оптимальный вариант распределения средств: $x_1^*=0$, $x_2^*=40$, $x_3^*=20$, $x_4^*=0$.

Если $x_1^* = 40$, то $S_1 = S_0 - x_1^* = 60 - 40 = 20$. Из таблицы при $k = 2$ и $S_1=20$ находим в последнем столбце $x_2^* = 0$. Тогда $S_2 = S_1 - x_2^* = 20 - 0 = 20$. Действия при $S_2 = 20$ рассмотрены выше.

Получаем еще два оптимальных варианта распределения средств: $x_1^*=40$, $x_2^* = 0$, $x_3^* = 0$, $x_4^* = 20$ и $x_1^* = 40$, $x_2^* = 0$, $x_3^* = 20$, $x_4^* = 0$.

Для наглядности сведем оптимальные решения в таблицу.

x_1^*	x_2^*	x_3^*	x_4^*
0	40	0	20
0	40	20	0
40	0	0	20
40	0	20	0

Общий прирост выпуска продукции в каждом из вариантов равен 37 млн. руб.

Варианты заданий

Распределить оптимальным образом денежные средства в размере 5 млн. руб. между тремя регионами при заданных значения х функции эффективности.

Вариант 1

x	0	1	2	3	4	5
$g_1(x)$	0	2,4	3,5	4	5	5,6
$g_2(x)$	0	2	3	4,2	5,3	5,8
$g_3(x)$	0	3,1	3,3	4,2	6	6,1

Вариант 2

x	0	1	2	3	4	5
$g_1(x)$	0	4,4	4,7	4,9	5	5,2
$g_2(x)$	0	4,7	4,9	5,4	5,4	6,4
$g_3(x)$	0	4	4,5	5,1	6	6,2

Вариант 3

x	0	1	2	3	4	5
$g_1(x)$	0	0,2	0,6	1,5	2,4	4,4
$g_2(x)$	0	1	1,5	2	3	4,9
$g_3(x)$	0	1,5	2,2	3,4	4	5,1

Вариант 4

x	0	1	2	3	4	5
$g_1(x)$	0	2	2,3	2,9	3,7	4,5
$g_2(x)$	0	1,6	2	2,7	4	5,1
$g_3(x)$	0	2,2	2,8	3,5	3,8	5,4

Вариант 5

x	0	1	2	3	4	5
$g_1(x)$	0	2,1	2,4	2,9	3,5	4,4
$g_2(x)$	0	3	3,2	4	4,2	5
$g_3(x)$	0	3,1	4	4,7	5	6

Вариант 6

x	0	1	2	3	4	5
$g_1(x)$	0	3,1	3,4	4	4,5	5,2
$g_2(x)$	0	3,5	4	4,5	5	5,9
$g_3(x)$	0	4,1	4,3	5,1	6	6,1

Вариант 7

x	0	1	2	3	4	5
$g_1(x)$	0	2,3	4,5	6	8,7	9,5
$g_2(x)$	0	1,9	3,8	5	6,8	8
$g_3(x)$	0	4	5	5,4	7,2	9

Вариант 8

x	0	1	2	3	4	5
$g_1(x)$	0	1,2	1,6	3,4	4	5,2
$g_2(x)$	0	0,8	1,3	2	3,6	4,9
$g_3(x)$	0	0,5	1	2,3	2,9	4,1

Вариант 9

x	0	1	2	3	4	5
$g_1(x)$	0	4,2	4,9	5,7	6,4	7,8
$g_2(x)$	0	3,4	3,9	5	7	8,3
$g_3(x)$	0	4	6	6,5	8	9,4

Вариант 10

x	0	1	2	3	4	5
$g_1(x)$	0	1	2,4	2,6	3,4	4,2
$g_2(x)$	0	2,1	3	4,2	4,9	5
$g_3(x)$	0	2,6	3,5	4	4,7	5,4

Контрольные вопросы

1. Динамическое программирование.
2. Математическая модель оптимального распределении ресурсов.
3. Приведите представление таких компонент как этап, состояние, варианты решения.
4. Обоснуйте выражение для функционального уравнения Беллмана.