Применение линейной алгебры в экономике

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
СТРОИТЕЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Модель межотраслевого баланса

Отрасли	P_1	P_2	…	P_i	…	P_n	Итого	Конечный продукт	Валовой продукт
P_1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1i}	…	x_{1n}	Σx_{1j}	y_1	x_1
P_2	x_{21}	x_{22}	…	x_{2i}	…	x_{2n}	Σx_{2j}	y_2	x_2
…	…	…	…	I квадрант			…	II квадрант	
P_i	x_{i1}	x_{i2}	…	x_{ii}	…	x_{in}	Σx_{ij}	y_i	x_i
…									
P_n	x_{n1}	x_{n2}	…	x_{ni}	…	x_{nn}	Σx_{nj}	y_n	x_n
Итого	Σx_{k1}	Σx_{k2}	…	Σx_{ki}	…	Σx_{kn}	$\Sigma\Sigma x_{kj}$	Σy_k	Σx_k
Условно чистая продукция	V_1	V_2	…	V_i	…	V_n	ΣV_j		
			III квадрант					IV квадрант	
Валовой продукт	x_1	x_2	…	x_i	…	x_n	Σx_j	$x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i$	

Пример

	P_1	P_2	P_3	Σ	Y	X
P_1	20	50			200	300
P_2	10	-	40			500
P_3	-				240	
Σ				310		
V		390				
X						

Основное уравнение МОБ в матричной форме

коэффициенты прямых затрат

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}$$

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_i$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$X = AX + Y$$

$$X = (E - A)^{-1} Y = SY.$$

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Пример

В экономике, состоящей из 3-ёх отраслей, 1,2,3 - технология производства характеризуется следующими коэффициентами прямых технологических затрат a_{ij}.

a_{ij}	I	II	III
I	0.1	0.2	0.2
II	0.3	0.2	0.4
III	0.3	0.4	0.1

При полном использовании производственных возможностей -
отрасль I может произвести 717,51 ед. продукции,
отрасль II может произвести 1338,98 ед. продукции,
отрасль III может произвести 1389,83 ед. продукции.

Определить

Каков должен быть спрос на конечную продукцию этих отраслей, чтобы их произведенные мощности использовались полностью.

Пример

Потребление / Производство	P_1	P_2	Конечное потребление Y_i	Валовой продукт X_i
P_1	4	0	6	10
P_2	1	8	7	16
Условно-чистая продукция V_j	5	8		
Валовой продукт X_j	10	16		

Постройте систему балансовых уравнений и найдите:

а) вектор валового продукта, если вектор конечного потребления $\bar{y} = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix}$

б) вектор конечного потребления, если вектор валового продукта $\bar{x} = \begin{pmatrix} 20 \\ 25 \end{pmatrix}$

Пример

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли		Конечный продукт	Валовой выпуск
	Энергетика	Машиностроение		
Энергетика	7	21	72	100
Машиностроение	12	15	123	150

Вычислить необходимый объем валового выпуска каждой отрасли, если конечное потребление энергетической отрасли увеличивается вдвое, а машиностроение сохранится на прежнем уровне. Найти чистую продукцию отраслей.

Пример

Рассмотрим построение МОБ на условном примере. Допустим что экономика страны состоит из 3 отраслей. Взаимосвязи между ними можно проследить по их счетам. В примере не учитывается уплата отраслями налогов.

		1	**2**	**3**	**Итого**	**Конечное использование**	**Валовое накопление**	**Итого**	**Всего**
Промежуточное потребление (отрасли)	**1**								
	2								
	3								
Итого									
Оплата труда наемных рабочих									
Валовая прибыль									
Итого									
Всего									

Счет отрасли 1, млн. руб.

Дебет		Кредит	
Запасы готовой продукции		Получено за продукцию,	
на начало года	10	проданную отрасли 2	70
Куплено материалов у		Получено за продукцию,	
отрасли 2	20	проданную населению	70
Куплено материалов у		Запасы готовой продукции	
отрасли 3	50	на конец года	10
Выплачено работникам	60		
Всего затрат	140	Всего получено	150
Прибыль	10		
Итого	150	Итого	150

Счет отрасли 2, млн. руб.

Дебет		Кредит	
		Получено за продукцию, проданную отрасли 1	20
Куплено материалов у отрасли 1	70	Получено за продукцию, проданную отрасли 3	70
Выплачено работникам	20	Запасы готовой продукции на конец года	9
Всего затрат	90	Всего получено	99
Прибыль	9		
Итого	99	Итого	99

Счет отрасли 3, млн. руб.

Дебет		Кредит	
		Получено за продукцию, проданную отрасли 1	50
Куплено материалов у отрасли 2	70	Получено за продукцию, проданную населению	40
Выплачено работникам	30		
Всего затрат	100	Всего получено	90
		Убыток	10
Итого	100	Итого	100

Линейная модель обмена

x_i – национальный доход i-той страны,

a_{ij} – доля национального дохода, которую

j- страна тратит на покупку у i-той страны.

Будем считать, что весь национальный доход тратится на закупку товаров либо внутри страны, либо на импорт из других стран, т.е

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = a_{1j} + a_{2j} + \ldots + a_{nj} = 1, \quad i = 1, \ldots, n.$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \geq 0 -$$

структурная матрица торговли.

Сумма элементов ∀ столбца матрицы *A* равна 1.

Для *i*-той страны выручка от внутренней и внешней торговли равна

$$p_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n.$$

Или в матричной форме P=Ax

Для сбалансированной торговли необходима *бездефицитность* торговли каждой страны, т.е. выручка от торговли каждой страны должна быть не меньше ее национального дохода:

$$p_i \geq x_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$ **Допустим,что**

что $p_i > x_i$

национальный доход *i*-ой страны

Выручка *i*-той страны

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n > x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n > x_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n > x_n \end{cases}$$

Сложим все неравенства системы

$$x_1(a_{11}+a_{21}+\ldots+a_{n1})+x_2(a_{12}+a_{22}+\ldots+a_{n2})$$
$$+\ldots+x_n(a_{1n}+a_{2n}+\ldots+a_{nn})>x_1+x_2+\ldots+x_n.$$

Выражения в скобках равны единице. $\longrightarrow$

$$x_1+x_2+\ldots+x_n>x_1+x_2+\ldots+x_n.$$

=> $p_i > x_i$ невозможно, и условие $p_i \geq x_i$ принимает вид $p_i = x_i$,.

С экономической точки зрения это означает, что все страны не могут одновременно получать прибыль.

Уравнение обмена

$$\boxed{AX = X}$$

или

$$\boxed{(A - E)X = 0}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \geq 0$$

X- вектор национальных доходов

Замечание . Модель международной торговли является частным случаем более общей модели , называемой линейной моделью обмена.