Лекция №8

Сетевые модели

Сетевые модели (сети Петри) используются для решения задач, связанных с формализованным описанием и анализом причинно-следственных связей в сложных системах, где одновременно параллельно протекает несколько процессов.

Развитие теории сетей Петри проводилось по двум направлениям. *Формальная теория* сетей Петри занимается разработкой основных средств, методов и понятий, необходимых для применения сетей Петри. *Прикладная теория* сетей Петри связана главным образом с применением сетей Петри к моделированию систем, их анализу и получающимся в результате этого глубоким проникновением в моделируемые системы.

Представление сетей Петри основано на 2 понятиях: *событие* и *условие*.

Возникновением события управляет состояние системы. Состояние системы может быть описано множеством условий.

В сети Петри событиям соответствуют *переходы*, а условиям – *позиции*. Связи переходов и позиций задаются входными и выходными функциями. *Входная функция* отображает переход во множество позиций, называемых *входными позициями перехода*. *Выходная функция* отображает переход во множество позиций, называемых *выходными позициями перехода*.

Графически *N-схема* изображается в виде двудольного ориентированного мультиграфа, который представляет собой позиции и переходы (рис. 8.1). Граф имеет два типа узлов: позиции и переходы, изображающиеся 0 и 1 соответственно (позиции так же могут быть изображены в виде кружков, а переходы – прямоугольников). Ориентированные дуги соединяют позиции и переходы. Дуга, направленная от позиции к переходу, определяет позицию, которая является *входом перехода*. Кратные входы в переход указываются кратными дугами из входных позиций в переход. *Выходная позиция* указывается дугой от перехода к позиции.

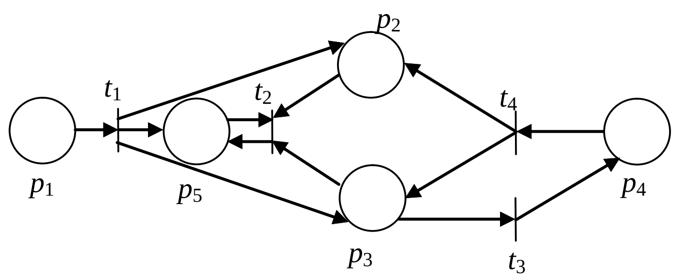

Рис. 8.1. Графическое изображение *N*-схемы

Формально сеть Петри (*N-схема*) задается четверкой вида $N = \langle P, T, F, H \rangle$, где P – конечное множество символов, называемых позициями, $P \neq \varnothing$, T – конечное множество символов, называемых переходами, $T \neq \varnothing$, $P \cap T \neq \varnothing$, F – входная функция (прямая функция инцидентности), $F : P \times T \to \{0;1\}$; H – выходная функция (обратная функция инцидентности), $H : T \times P \to \{0;1\}$. Таким образом входная функция отображает переход t_j в множество входных позиций $p_i \in F(t_j)$, а выходная функция H отображает переход t_j в множество выходных позиций $p_i \in H(t_j)$. Для каждого перехода $t_j \in T$ можно определить множество входных позиций перехода $F(t_j)$ и выходных позиций перехода $H(t_j)$ как

$$F(t_j) = \left\{ p_i \in P \middle| F(p_i, t_j) = 1 \right\}; \quad i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m},$$

$$H(t_j) = \left\{ p_i \in P \middle| H(t_j, p_i) = 1 \right\}; \quad n = |P|, m = |T|.$$

Аналогично, для каждого перехода $t_j \in T$ вводятся определения множества входных переходов позиции $F(p_i)$ и множества выходных переходов позиции $H(p_i)$:

$$F(p_i) = \left\{ t_j \in T \middle| F(t_j, p_i) = 1 \right\}; \quad i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m},$$

$$H(p_i) = \left\{ t_j \in T \middle| H(p_i, t_j) = 1 \right\}; \quad n = |P|, m = |T|.$$

Пример: Представим формально *N-схему*, изображенную на рис. 8.1:
$N = \langle P, T, F, H \rangle$, $P=<p_1,p_2,p_3,p_4,p_5>$, $T=<t_1,t_2,t_3,t_4>$

$F(t_1)=\{p_1\}$, $H(t_1)=\{p_2,p_3,p_5\}$,
$F(t_2)=\{p_2,p_3,p_5\}$, $H(t_2)=\{p_5\}$,
$F(t_3)=\{p_3\}$, $H(t_3)=\{p_4\}$,
$F(t_4)=\{p_4\}$, $H(t_4)=\{p_2,p_3\}$.

Приведенное представление *N-схемы* может быть использовано только для отображения статики моделируемой системы (взаимосвязи событий и условий). Для представления динамических свойств объекта вводится функция маркировки (разметки):

$$\mu : H \to \{0,1,2,\ldots\}.$$

Маркировка – присвоение абстрактных объектов, называемых *метками* (фишками), позициям *N-схемы*, причем количество меток, соответствующих каждой позиции может меняться.

Маркированная *N-схема* может быть описана пятеркой вида:

$$N_\mu = \langle P, T, F, H, \mu \rangle,$$

и является совокупностью сети Петри и маркировки μ.

Графически маркировка изображается в виде точек, называемых *метками (tokens),* и располагающихся в кружках, соответствующих позициям сети.

Функционирование сети Петри отражается путем перехода от разметки к разметке до тех пор, пока не будет получена тупиковая. $\mu_0 : P \to \{0,1,2,...\}$ – начальная разметка (отсутствие меток). Смена разметок происходит в результате срабатывания одного из переходов сети.

Правила выполнения сети

1) Переход запускается, если он разрешен. Переход называется *разрешенным*, если каждая из его входных позиций имеет число фишек по крайней мере равное числу дуг из позиции в переход. Фишки во входной позиции, которые разрешают переход, называются его *разрешающими фишками*. Например, если позиции p_1 и p_2 служат входами для перехода t_1, тогда t_1 разрешен, если p_1 и p_2 имеют хотя бы по одной фишке (рис. 8.2, *а*). Для перехода t_3 с входным комплектом $\{p_3,p_3,p_3\}$ позиция p_3 должна иметь не менее 3 фишек для разрешения перехода t_3 (рис. 8.2, *б*).

Рис. 8.2

2) Необходимое условие срабатывания перехода t_j:

$$p_i \in F(t_j), \mu(p_i) \geq 1,$$

где $\mu(p_i)$ – разметка позиции p_i. Переход t_j, для которого выполняется указанное условие, определяется как находящийся в состоянии готовности к срабатыванию или как *возбужденный переход*.

3) Срабатывание перехода t_j изменяет разметку сети $\mu(p)$ на $\mu'(p)$ по следующему правилу:

$$\mu'(p) = \mu(p) - F(t_j) + H(t_j),$$

то есть переход t_j изымает по одной метке из каждой своей входной позиции (количество удаленных фишек для каждой позиции соответствует числу дуг, идущих из этой позиции в переход) и добавляет по одной метке в каждую из выходных позиций (количество помещаемых фишек в позицию соответствует количеству дуг входящих в данную позицию из перехода).

Для изображения схемы разметки используют обозначение $\mu \mid\!\xrightarrow{t_j} \mu'$.

Пример. Переход t_3 $F(t_3)=\{p_1\}$ и $H(t_3)=\{p_2,p_3\}$ разрешен каждый раз, когда в p_1 будет хотя бы одна фишка (рис. 8.3). Переход t_3 запускается удалением одной фишки из позиции p_1 и помещением одной фишки в позицию p_2 и p_3 (рис. 8.4). Переход t_4, в котором $F(t_4)=\{p_4,p_5\}$ и $H(t_4)=\{p_5,p_6,p_6\}$ запускается (рис. 8.5) удалением по одной фишке из позиций p_4 и p_5, при этом одна фишка помещается в p_5 и две в p_6 (рис. 8.6).

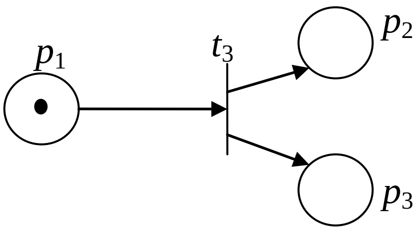

Рис. 8.3. Сеть Петри
до срабатывания перехода t_3

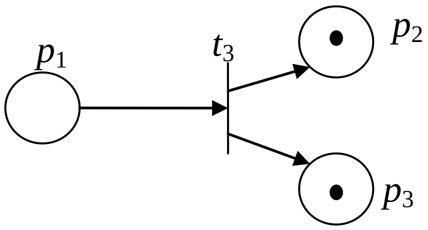

Рис. 8.4. Сеть Петри
после срабатывания перехода t_3

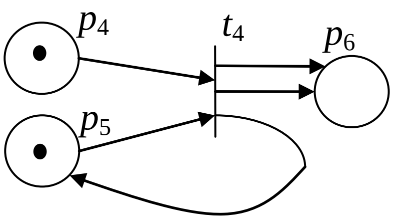

Рис. 8.4. Сеть Петри
до срабатывания перехода t_4

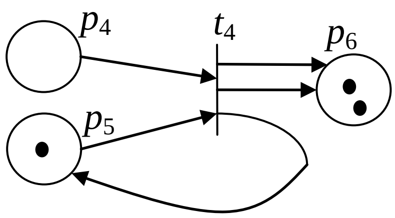

Рис. 8.5. Сеть Петри
после срабатывания перехода t_4

Правила срабатывания переходов

1. Если среди входных функций перехода имеется хотя бы одна позиция без маркера, то переход не срабатывает.

2. Если два перехода имеют общую входную позицию, которая содержит один маркер, то срабатывает один из них, а эта позиция называется конфликтной.

3. Если имеется несколько попарно независимо-разрешенных переходов, то их срабатывание происходит в любой последовательности или параллельно (рис. 8.6). Такие переходы называются *одновременными* и моделируют параллельное возникновение событий.

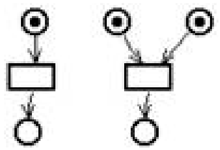

Рис. 8.6

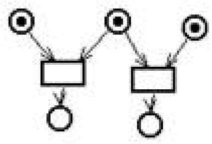

Рис. 8.7

4. Другая ситуация в сети Петри (рис. 8.7). В ней одновременность переходов невозможна. Эти два перехода находятся в *конфликте*, т. е. запуск одного из них удаляет фишку из общей входной позиции и тем самым запрещает запуск другого. Таким образом, моделируются взаимоисключающие события системы.