

Моделирование дискретных систем

Особенности построения математических схем для моделирования дискретных систем рассмотрим на примере использования в качестве математического аппарата теории автоматов.

Теория автоматов – это раздел теоретической кибернетики, в котором изучаются математические модели – автоматы. На основе этой теории систему представляют в виде автомата, который перерабатывает дискретную информацию и меняет своё внутреннее состояние лишь в допустимые моменты времени.

Конечные автоматы

Определение: Автомат называется *конечным автоматом*, если множества входных сигналов, внутренних состояний и выходных сигналов являются конечными множествами.

Абстрактно конечный автомат можно представить в виде математической схемы, которая характеризуется шестью элементами: конечным множеством X входных сигналов (входной алфавит), конечным множеством Y выходных сигналов (выходной алфавит), конечным множеством Z внутренних состояний (внутренний алфавит или алфавит состояний), функцией переходов $\phi(x, z)$, функцией выходов $\psi(x, z)$ и начальным состоянием z_0 . Таким образом, конечный автомат определяется шестеркой: $X, Y, Z, z_0, \phi(x, z), \psi(x, z)$.

Функция перехода $\phi(x, z)$ определяет как входной сигнал x_k в момент времени t_k преобразует состояние z_k в новое состояние z_{k+1} , т.е.

$$z_{k+1} = \phi(z_k, x_k).$$

Функция выходов $\psi(x, z)$ указывает значение сигнала на выходе автомата в зависимости от значений входного сигнала x_k и состояния автомата z_k , т.е.

$$y_k = \psi(z_k, x_k)$$

Конечные автоматы функционируют в дискретном времени, моментами которого являются *такты* (равные интервалы времени с постоянными значениями входного, выходного сигналов и внутреннего состояния).

Обозначим через $z(t)$, $x(t)$, $y(t)$ состояния, входные и выходные сигналы, соответствующие t -му такту ($t=0,1,2,3\dots$). При этом: $z(0)=z_0$, $z(t) \in Z$, $x(t) \in X$, $y(t) \in Y$.

Абстрактный конечный автомат имеет один входной и один выходной каналы. В зависимости от закона функционирования абстрактные автоматы подразделяются на автоматы первого и второго рода.

Работу автомата можно описать уравнениями:

Для автомата I рода (*автомата Мили*):

$$z(t+1) = \phi[z(t), x(t)], \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

$$y(t) = \psi[z(t), x(t)], \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

Для автомата II рода:

$$z(t+1) = \phi[z(t), x(t)], \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

$$y(t) = \psi[z(t), x(t-1)], \quad t = 1, 2, 3, \dots$$

Определение: *Автомат Мура* – это автомат, для которого функция выходов не зависит от входной переменной $x(t)$.
 $y(t) = \psi(z(t)), \quad t = 0, 1, 2, \dots$

Он является автоматом II рода.

Эти уравнения – частный случай уравнений:

$$z(t) = \Phi(\vec{z}^0, \vec{x}, \vec{v}, \vec{h}, t)$$

$$\vec{y}(t) = F(\vec{z}, t),$$

когда система S – детерминирована и на ее единственный вход поступает дискретный сигнал X .

По числу состояний различают автоматы с памятью и без памяти. *Автоматы с памятью* имеют более одного состояния, а *автоматы без памяти* (*логические* или *комбинационные схемы*) обладают одним состоянием. По характеру отсчета дискретного времени автоматы делятся на *синхронные* и *асинхронные*.

В *синхронных автоматах* моменты времени, в которые автомат считывает входные сигналы, задаются принудительно синхронизирующими сигналами. После очередного синхронного сигнала происходит переход в новое состояние и выдача выходного сигнала, после этого автомат может воспринимать следующее значение выходного сигнала.

Асинхронный автомат считывает входной сигнал непрерывно и, реагируя поэтому на длинный входной сигнал постоянной величины, он может несколько раз изменять состояние, давая соответствующее число раз выходной сигнал, пока не перейдет в устойчивое состояние, которое уже не может быть изменено входным сигналом.

Дискретно-детерминированные модели

Для их описания используют **F–схемы** (*finite automata*). Для задания конечного автомата нужно описать все элементы множества $F = \langle Z, X, Y, \phi, \psi, z_0 \rangle$. Рассмотрим несколько способов задания таких автоматов: табличный, графический и матричный.

Табличный основан на использовании таблиц переходов и выходов, строки которых соответствуют входным сигналам автомата, а столбцы –

его состояниям. На пересечении i -ой строки и k -го столбца таблицы переходов помещают соответствующее значение $\phi(z_k, x_i)$ функции переходов, а в таблице выходов – соответствующее значение $\psi(z_k, x_i)$ функции выходов (таблицы 5.1. и 5.2.).

Таблица 5.1.

Функции переходов.

X_i / Z_k	Z_0	Z_1	...	Z_n
X_1	$\phi(X_1, Z_0)$	$\phi(X_1, Z_1)$...	$\phi(X_1, Z_n)$
X_2	$\phi(X_2, Z_0)$	$\phi(X_2, Z_1)$...	$\phi(X_2, Z_n)$
...
X_m	$\phi(X_m, Z_0)$	$\phi(X_m, Z_1)$...	$\phi(X_m, Z_n)$

Таблица 5.2.

Функции выходов.

X_i / Z_k	Z_0	Z_1	...	Z_n
X_1	$\psi(X_1, Z_0)$	$\psi(X_1, Z_1)$...	$\psi(X_1, Z_n)$
X_2	$\psi(X_2, Z_0)$	$\psi(X_2, Z_1)$...	$\psi(X_2, Z_n)$
...
X_m	$\psi(X_m, Z_0)$	$\psi(X_m, Z_1)$...	$\psi(X_m, Z_n)$

Для F – автомата Мура обе таблицы можно совместить и получить таблицу переходов (таблица 5.3), в которой ставится взаимнооднозначное соответствие между выходными сигналами автомата его внутренними состояниями.

Таблица 5.3.

Функции переходов и выходов.

X_i	Z_0	Z_1	...	Z_n
	$\psi(Z_0)$	$\psi(Z_1)$...	$\psi(Z_n)$
X_1	$\phi(X_1, Z_0)$	$\phi(X_1, Z_1)$...	$\phi(X_1, Z_n)$
X_2	$\phi(X_2, Z_0)$	$\phi(X_2, Z_1)$...	$\phi(X_2, Z_n)$
...
X_m	$\phi(X_m, Z_0)$	$\phi(X_m, Z_1)$...	$\phi(X_m, Z_n)$

Пример 1. Пусть задан автомат первого рода:

$X = \{x_1, x_2\}$, $Z = \{z_0, z_1, z_2\}$, $Y = \{y_1, y_2\}$, отображение F множества Z в себя определяется следующим образом:

$$Fz_0 = \{z_2(x_1 / y_1), z_0(x_2 / y_1)\},$$

$$Fz_1 = \{z_0(x_1 / y_1), z_2(x_2 / y_2)\},$$

$$Fz_2 = \{z_0(x_1 / y_2), z_1(x_2 / y_1)\}.$$

Табличное задание автомата имеет вид (таблица 5.4):

Таблица 5.4

x_i	z_k		
	z_0	z_1	z_2
	Переходы		
x_1	z_2	z_0	z_0
x_2	z_0	z_2	z_1
	Выходы		
x_1	y_1	y_1	y_2
x_2	y_1	y_2	y_1

Пример 2. Пусть задан автомат Мура:

$X=\{x_1, x_2\}$, $Z=\{z_0, z_1, z_2\}$, $Y=\{y_1, y_2\}$, отображение F множества Z в себя определяется следующим образом:

$$Fz_0(y_2) = \{z_2(x_1), z_0(x_2)\},$$

$$Fz_1(y_2) = \{z_0(x_1), z_2(x_2)\},$$

$$Fz_2(y_1) = \{z_0(x_1), z_1(x_2)\}.$$

Табличное задание автомата имеет вид (таблица 5.5):

Таблица 5.5

x_i	y		
	y_1	y_2	y_1
	z_0	z_1	z_2
x_1	z_2	z_0	z_0
x_2	z_0	z_2	z_1

Пример 3. По заданному автомату Мура (таблица 5.6)

Таблица 5.6

x_i	y				
	y_1	y_1	y_3	y_2	y_3
	z_0	z_1	z_2	z_3	z_4
x_1	z_1	z_4	z_4	z_2	z_2
x_2	z_3	z_1	z_1	z_0	z_0

построить автомат Мили, интерпретирующий данный автомат Мура.

Решение. Входной сигнал x_1 в момент времени t_1 преобразует состояние z_0 в новое состояние z_1 , которое на выходе выдает сигнал y_1 и т.д.

Тогда автомат Мили, интерпретирующий автомат Мура, задается таблицей 5.7.

Таблица 5.7

x_i	z_k				
	z_0	z_1	z_2	z_3	z_4
	Переходы				
x_1	z_1	z_4	z_4	z_2	z_2
x_2	z_3	z_1	z_1	z_0	z_0
	Выходы				
x_1	y_1	y_3	y_3	y_3	y_3
x_2	y_2	y_1	y_1	y_1	y_1

При *графическом* задании конечного автомата используют понятие направленного графа. Этот граф представляет собой набор вершин, которые соответствуют внутренним состояниям автомата и соединяющие вершины дуги, соответствующие входным и выходным переменным. Дуги, соединяющие две вершины $Z_i \rightarrow Z_j$, помечаются входным сигналом X_k , вызывающим переход автомата из состояния Z_i в состояние Z_j . Таким образом, задается функция переходов. Аналогично определяется и функция выходов – дуги графа помечаются соответствующими выходными сигналами.

Графоиды на рис. 5.1. соответствуют данным таблиц 5.4 и 5.6.

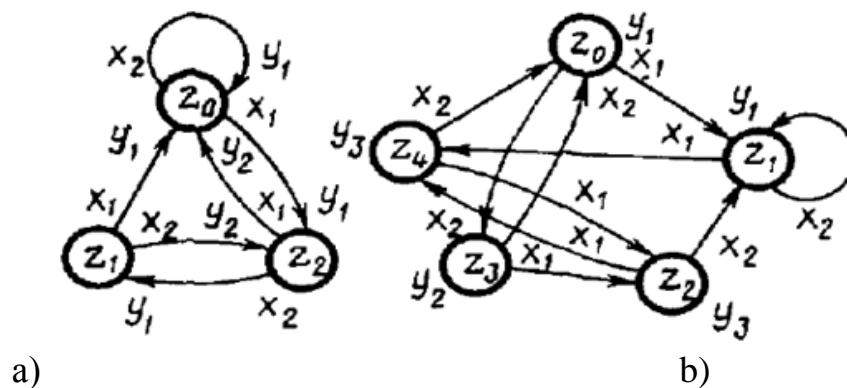


Рис. 5.1. Графы автоматов а) – Мили, б) – Мура.

Матричное представление конечного автомата: строки матрицы $C = \|c_{ij}\|$ соответствуют исходным состояниям, а столбцы – состояниям перехода. На пересечении i -ой строки и j -го столбца указывается пара X_k / Y_s , соответствующая входному сигналу, вызывающему переход автомата из состояния Z_i в состояние Z_j и выходному сигналу, выдаваемому при этом переходе.

Для рассмотренного нами автомата Мили (таблица 5.4) матрица будет иметь вид:

$$C = \begin{pmatrix} x_2/y_1 & - & x_1/y_1 \\ x_1/y_1 & - & x_2/y_2 \\ x_1/y_2 & x_2/y_1 & - \end{pmatrix}$$

Для автомата Мура, элемент c_{ij} равен множеству входных сигналов на переходе (z_i, z_j) , а выход описывается вектором выходов:

$$y = \begin{pmatrix} \psi(z_0) \\ \psi(z_1) \\ \dots \\ \psi(z_k) \\ \dots \\ \psi(z_K) \end{pmatrix},$$

i – ая компонента которого – выходной сигнал, отмечающий состояние z_i . Для рассмотренного нами автомата Мура (таблица 5.6) матрица соединений и вектор выходов записываются следующим образом:

$$C = \begin{pmatrix} - & x_1 & - & x_2 & - \\ - & x_2 & - & - & x_1 \\ - & x_2 & - & - & x_1 \\ x_2 & - & x_1 & - & - \\ x_2 & - & x_1 & - & - \end{pmatrix}; \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix}.$$

F – схемы широко применяются для описания функционирования таких объектов как элементы и узлы ЭВМ, устройства контроля, регулирования и управления, коммутационные устройства (например: телефонные станции).

Эквивалентность автоматов

Состояния автомата a_i и a_j называются *эквивалентными*, что обозначается как $a_i \sim a_j$, если для них имеет место: $\forall z$

1. $\lambda(a_i, z) = \lambda(a_j, z)$,
2. $\delta(a_i, z) \sim \delta(a_j, z)$.

Автоматы $S = \langle Z, W, A, \lambda, \delta \rangle$, и $S_1 = \langle Z, W, A_1, \lambda_1, \delta_1 \rangle$, называют *эквивалентными*, что обозначается как $S \sim S_1$, если $(\forall a \in A \exists a_1 \in A_1, a \sim a_1) \& (\forall a_1 \in A_1 \exists a \in A, a_1 \sim a)$.

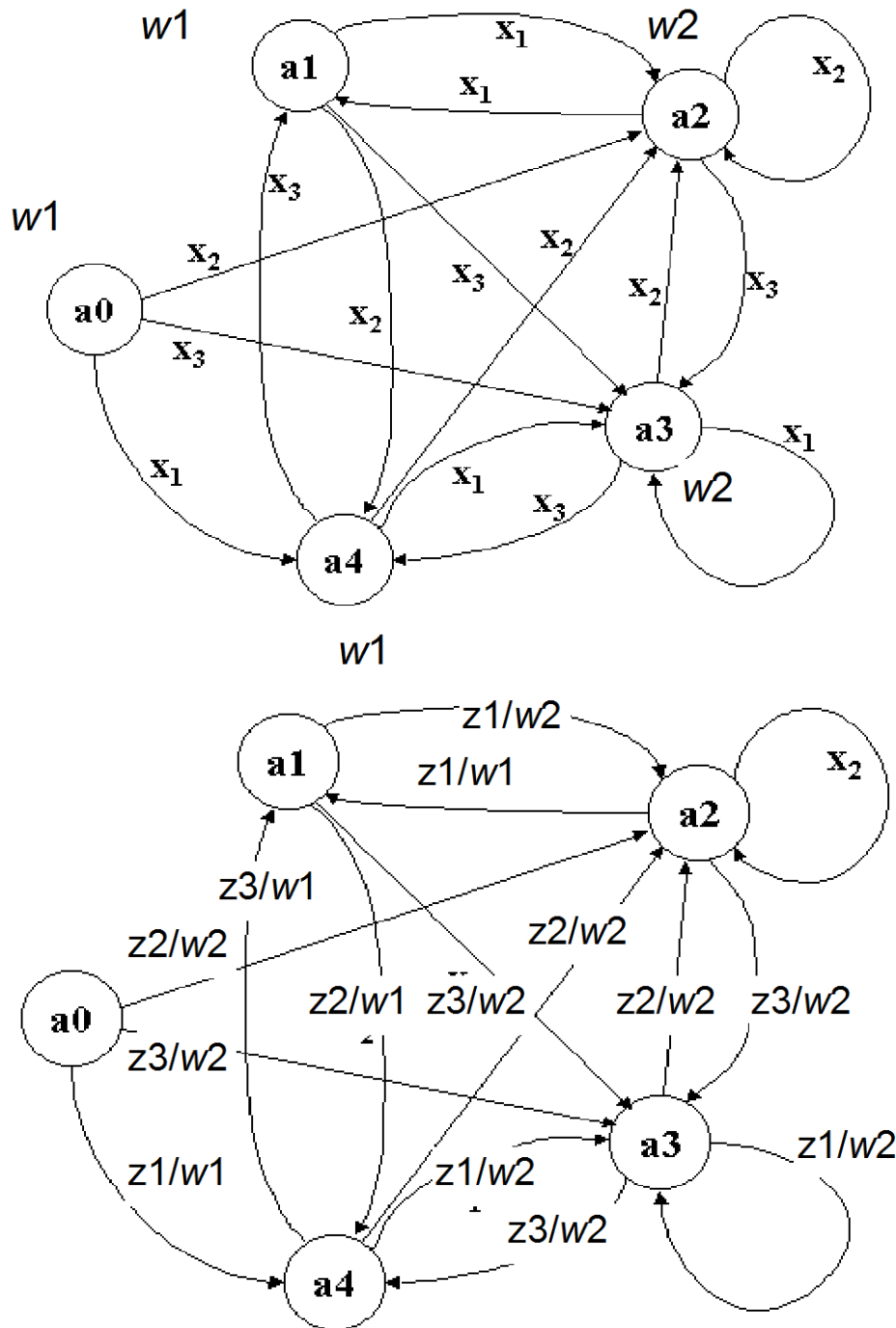
Были введены две модели автоматов – автомат Мура и автомат Мили. Следующая теорема показывает, что эти модели равномогны, т.е. любой автомат можно реализовать в каждой из этих моделей.

Теорема. Для любого автомата Мура существует эквивалентный ему автомат Мили и наоборот.

Доказательство теоремы построим на преобразовании автомата одного типа, описанного с помощью графа, в автомат другого типа.

Необходимость. Покажем, как для любого автомата Мура построить эквивалентный ему автомат Мили. Для этого достаточно перенести выходы автомата с вершин графа на входящие дуги графа.

Рассмотрим это на примере автомата Мура $S_{\mu} = \langle Z, W, A, \lambda, \delta, \gamma \rangle$, где $A = \{a_0, a_1, a_2, a_3, a_4\}$; $Z = \{x_1, x_2, x_3\}$; $W = \{w_1, w_2\}$. Функции автомата представлены в виде графа на рис. 1.4. Результирующий автомат функционирует в соответствии с графом на рис.1.5. Полученный автомат эквивалентен исходному автомату по построению.

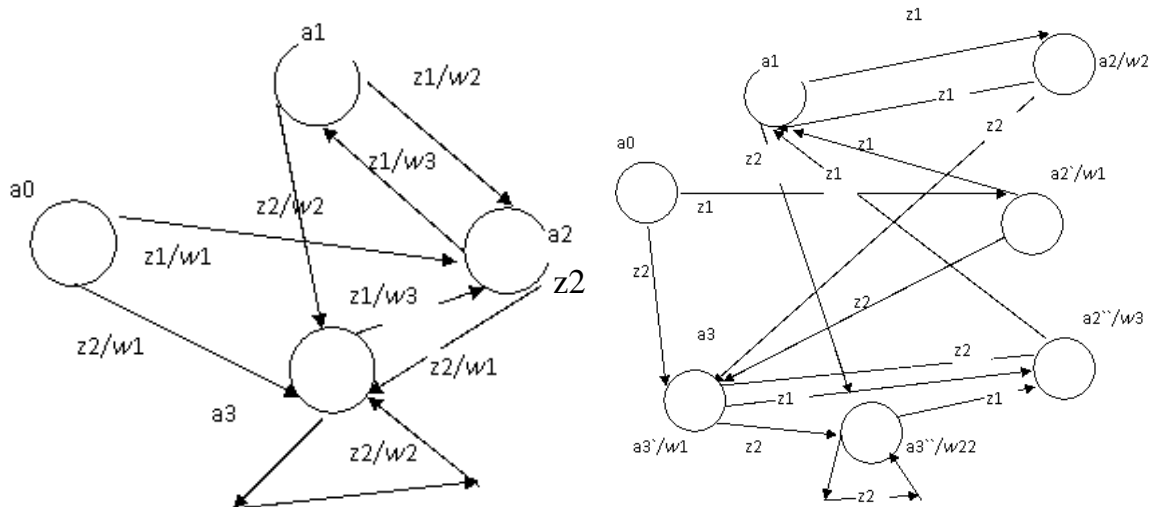


Достаточность. Покажем, что для любого автомата Мили можно построить эквивалентный ему автомат Мура. Для каждой вершины графа

рассмотрим заходящие в неё дуги. Если эти дуги взвешены различными значениями выхода, то расцепим вершину таким образом, чтобы каждому значению выхода соответствовала своя вершина, и каждую дугу направим в свою вершину.

Пусть автомат Мили S описан в виде графа на рис. 1.6. Рассмотрим состояние a_2 , в которое заходят дуга (a_0, a_2) , отмеченная выходом w_1 , и дуга (a_3, a_2) , отмеченная выходом w_3 , и дуга (a_1, a_2) , отмеченная выходом w_2 . Других заходящих дуг в эту вершину нет, значит расцепим вершину a_2 в графе для автомата Мура на a_2 , которой сопоставим выход w_2 и куда направим дугу (a_1, a_2) , вершину a_1' , которой сопоставим выход w_1 и куда направим дугу (a_0, a_2') , и вершину a_2'' , куда направим дугу (a_3, a_2) и которой сопоставим выход w_3 . Выходные дуги для вновь введённых вершин будут те же, что и для исходной вершины. Таким образом, из вершин a_2' и a_2'' должны исходить дуги к тем же вершинам, что и из вершины a_2 .

Полученный автомат описан графом на рис. 1.7.



Очевидно, что автоматы S и S' эквивалентны по построению.

Модель автомата Мура проще, за простоту модели заплатили большим числом состояний.