Лекция № 17

Моделирование случайных воздействий

В моделировании систем методами имитационного моделирования, существенное внимание уделяется учету случайных факторов и воздействий на систему. Для их формализации используются случайные события, дискретные и непрерывные величины, векторы, процессы. Формирование реализации случайных объектов любой природы сводится к генерации и преобразованию последовательностей случайных чисел.

В практике имитационного моделирования систем на ЭВМ ключевым факторам является оптимизация алгоритмов работы со случайными числами.

Таким образом, наличие эффективных методов, алгоритмов и программ формирования, необходимых для моделирования конкретных систем последовательностей случайных чисел, во многом определяет возможности практического использования машинной имитации для исследования и проектирования систем.

Простейшими случайными объектами при статистическом моделировании систем являются *случайные события*.

1. Моделирование противоположных событий

Пусть имеются случайные числа r_i т.е. возможные значения случайной величины ξ, равномерно распределенной в интервале (0,1). Необходимо реализовать случайное событие A, наступающее с заданной вероятностью p. Определим A как событие, состоящее в том, что выбранное значение r_i случайной величины ξ удовлетворяет неравенству

$$r_i \le p. \tag{17.1}$$

Противоположное событие $\overline{A}$ состоит в том, что $r_i > p$. Тогда $P(\overline{A})=1-p$.

Процедура моделирования состоит в выборе значений r_i и сравнении их с p. Если условие (17.1) выполняется, то исходом испытания является событие A, иначе $\overline{A}$.

Пример 1. Вероятность замены неисправной детали на новую при ремонте автомобиля в каждом испытании равна 0,53. Смоделировать пять испытаний и определить последовательность замены детали на новую или восстановленную.

Решение. Пусть событие A состоит в замене детали на новую, тогда противоположное событие $\overline{A}$ – замена детали на восстановленную.

Пусть из таблицы выбраны равномерно распределенные на интервале (0,1) случайные числа 0,52; 0,56; 0,09; 0,32 и 0,10.

Тогда при пяти испытаниях получим следующую последовательность реализации событий A, $\overline{A}$, A, A, A.

2. Моделирование дискретной случайной величины.

Для того чтобы смоделировать (разыграть) дискретную случайную величину X, заданную законом распределения

X	x_1	x_2	…	x_n
p	p_1	p_2	…	p_n

надо: 1) разбить интервал (0,1) на n частичных интервалов:

Δ_1 – $(0;p_1)$,

Δ_2 – $(p_1;p_1+p_2)$,

…

Δ_n – $(p_1+p_2+\ldots+p_{n-1};1)$.

2) выбрать случайное число r_j.

Если случайное число r_j попало в частичный интервал Δ_i, то разыгрываемая величина приняла возможное значение x_i.

Пример 2. Известно количество машин, приезжающих на мойку автомашин в течение последних 100 часов.

Число машин в час	Частота
4	5
5	11
6	16
7	23
8	45

Смоделировать прибытие автомашин в течение 6 часов.

Решение.

Построим закон распределения дискретной случайной величины X.

n=5+11+16+23+45=100.

X	4	5	6	7	8
p	0,05	0,11	0,16	0,23	0,45

Разобьем интервал (0,1) на пять частичных интервала:

Δ_1 – (0;0,05),

Δ_2 – (0,05;0,05+0,11)=(0,06;0,16),

Δ_3 – (0,16;0,32),

Δ_4 – (0,32;0,55),

Δ_5 – (0,55;1).

Выпишем из таблицы *«Равномерно распределенные случайные числа»,* шесть случайных чисел, например, 0,32; 0,17; 0,9; 0,05; 0,97; 0,87 (пятая строка таблицы снизу).

Случайное число 0,32 принадлежит частичному интервалу Δ_3, поэтому разыгрываемая дискретная случайная величина приняла возможное значение x_3=6; случайное число 0,17 принадлежит частичному интервалу Δ_3, поэтому разыгрываемая дискретная случайная величина приняла возможное значение x_3=6.

Аналогично получим остальные возможные значения.

Итак, прибытие машин в течение шести часов:

6;6;8;4;8;8.

3. Моделирование полной группы событий.

Пусть A_1, A_2, ..., A_n, – полная группа событий, наступающих с вероятностями p_1, p_2, ..., p_n соответственно.

Моделирование полной группы несовместных событий можно свести к разыгрыванию дискретной случайной величины X со следующим законом распределения:

X	1	2	…	n
p	p_1	p_2	…	p_n

Правило: для того чтобы смоделировать испытание, в каждом из которых наступает одно из событий A_1, A_2, ..., A_n полной группы событий, наступающих с вероятностями p_1, p_2, ..., p_n соответственно, достаточно разыграть дискретную случайную величину со следующим законом распределения:

X	1	2	…	n
p	p_1	p_2	…	p_n

Если в испытании величина X приняла возможное значение x_i, то наступило событие A_i.

Пример 3. Заданы вероятности четырех событий, образующих полную группу: $p(A_1)$=0,19; $p(A_2)$=0,21; $p(A_3)$=0,34; $p(A_4)$=0,26. Смоделировать пять испытаний, в каждом из которых появляется одно из четырех заданных событий.

Решение.

Построим закон распределения дискретной случайной величины X.

X	1	2	3	4
p	0,19	0,21	0,34	0,26

Разобьем интервал (0,1) на четыре частичных интервала:

Δ_1 – (0;0,19),
Δ_2 – (0,19;0,40),
Δ_3 – (0,40;0,74),
Δ_4 – (0,74;1).

Выпишем из таблицы *«Равномерно распределенные случайные числа»,* пять случайных чисел, например, 0,66; 0,31; 0,85; 0,63; 0,73.

Случайное число 0,66 принадлежит частичному интервалу Δ_3, поэтому разыгрываемая дискретная случайная величина приняла возможное значение x_3=3, следовательно появилось событие A_3; случайное число 0,31 принадлежит частичному интервалу Δ_2, поэтому разыгрываемая дискретная случайная величина приняла возможное значение x_2=2, значит появилось событие A_2.

Аналогично получим остальные возможные значения.

Итак, последовательность появления событий: A_3; A_2; A_4; A_3; A_3.

4. Моделирование независимых событий.

Пусть независимые события A и B наступают с вероятностями p_A и p_B. Возможными исходами совместных испытаний будут события $AB, \bar{A}B, A\bar{B}, \overline{AB}$ с вероятностями $p_A p_B, (1-p_B)p_A, (1-p_A)p_B$, $(1-p_B)(1-p_A)$.

В моделировании испытаний можно использовать два варианта расчетов:

1) последовательную проверку условия (17.1);

2) определение одного из исходов $AB, \bar{A}B, A\bar{B}, \overline{AB}$ по жребию с соответствующими вероятностями.

Для первого варианта необходима пара чисел x_i, для выполнения условия (17.1). Во втором варианте необходимо одно число x_i, но сравнений может потребоваться больше.

5. Моделирование зависимых событий.

Пусть события A и B являются зависимыми. События наступают с вероятностями p_A и p_B. $P(B/A)$ – условная вероятность наступления события B при условии, что событие A произошло. Считается, что условная вероятность $P(B/A)$ задана.

Из последовательности случайных чисел $\{x_i\}$ извлекается число x_m, удовлетворяющее $x_m < p_A$. Если это неравенство справедливо, то наступило событие A. Дальше из совокупности чисел $\{x_i\}$ берется очередное число x_{m+1} и проверяется условие $x_{m+1} \le P(B/A)$. Возможный исход испытания являются AB или $A\bar{B}$.

Если условие $x_m < p_A$ не выполняется, то наступило событие $\bar{A}$. Для испытания, связанного с событием B, необходимо определить вероятность:

$$P(B/\bar{A}) = \frac{P(B) - P(A)P(B/A)}{1 - P(A)}.$$

Выберем из совокупности $\{x_i\}$ число x_{m+1}, проверим справедливость неравенства $x_{m+1} \le P(B/A)$. В зависимости от того, выполняется оно или нет, получим исходы испытания $\bar{A}B$ или $\overline{AB}$.

6. Моделирование непрерывной случайной величины.

Правило 1. Для того чтобы смоделировать (разыграть) возможное значение x_i непрерывной случайной величины X, зная ее функцию распределения $F(x)$, надо выбрать случайное число r_i, приравнять его функции распределения и решить относительно x_i полученное уравнение: $F(x_i) = r_i$.

Правило 2. Для того чтобы разыграть возможное значение x_i непрерывной случайной величины X, зная ее плотность распределения $f(x)$, надо выбрать случайное число r_i, и решить относительно x_i уравнение:

$$\int_{-\infty}^{x_i} f(x)dx = r_i,$$

или уравнение

$$\int_{a}^{x_i} f(x)dx = r_i, \tag{17.2}$$

где a – наименьшее конечное возможное значение X.

Пример 4. Разыграть четыре возможных значения непрерывной случайной величины X распределенной равномерно в интервале (4;14).

Решение. Случайная величина X, распределенная равномерно в интервале $(a,в)$ имеет функцию распределения

$$F(x) = \frac{x-a}{в-a}, \ (a < x < в)$$

В нашем случае,

$$F(x)=(x–4)/(14–4)=(x–4)/10.$$

В соответствии с правилом 1, приравняем заданную функцию распределения случайному числу r_i.

Выпишем из таблицы четыре случайных числа, например 0,74; 0,02; 0,94; 0,36.

$$(x_1–4)/10=0{,}74,\ x_1=11{,}4.$$
$$(x_2–4)/10=0{,}02,\ x_2=4{,}2.$$
$$(x_3–4)/10=0{,}94,\ x_3=13{,}4.$$
$$(x_4–4)/10=0{,}36,\ x_4=7{,}6.$$

Итак, разыгранные возможные значения:

11,4; 4,2; 13,4; 7,6.

Пример 5. Разыграть четыре возможных значения непрерывной случайной величины X, заданной плотностью распределения $f(x)=1–0{,}5x$ в интервале (0,2); вне этого интервала $f(x)=0$.

Решение. Используя правило 2, напишем уравнение

$$\int_{0}^{x_i} (1-0{,}5x)dx = r_i$$

Решив это уравнение относительно x_i получим

$$x_i–0{,}25x_i^2= r_i.$$

Возьмем случайные числа из таблицы 0,35; 0,96; 0,31; 0,53.

$$x_1–0{,}25x_1^2=0{,}35,\ x_{11}=0{,}388\in(0{,}2),\ x_{12}=3{,}613\notin(0{,}2)\Rightarrow\ x_1=0{,}388;$$
$$x_2–0{,}25x_2^2=0{,}96,\ x_{21}=1{,}6\in(0{,}2),\ x_{22}=2{,}4\notin(0{,}2)\Rightarrow\ x_2=1{,}6;$$
$$x_3–0{,}25x_3^2=0{,}31,\ x_{31}=0{,}338\in(0{,}2),\ x_{32}=3{,}661\notin(0{,}2)\Rightarrow\ x_3=0{,}338;$$
$$x_4–0{,}25x_4^2=0{,}53,\ x_{41}=0{,}628\in(0{,}2),\ x_{42}=3{,}371\notin(0{,}2)\Rightarrow\ x_4=0{,}628.$$

Итак, разыгранные возможные значения:

0,388; 1,6; 0,338; 0,628.

Для ряда законов распределения, наиболее часто встречающихся, получено аналитическое решение уравнения (17.2), результаты которого приведены в таблице 17.1.

Таблица 17.1.

Формулы для моделирования случайных величин

Закон распределения случайной величины	Плотность распределения	Формула для моделирования случайной величины
Экспоненциальный	$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$	$x_i = -\frac{1}{\lambda}\ln r_i$
Вейбулла	$f(x) = \frac{a}{b}\left(\frac{x}{a}\right)^{a-1} e^{-\left(\frac{x}{b}\right)^a}$	$x_i = b(-\ln r_i)^{\frac{1}{a}}$
Гамма-распределение	$f(x) = \frac{\lambda^n}{\Gamma(\eta)} e^{-\lambda x} x^{\eta-1}$	$x_i = -\frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^{\eta}\ln(1-r_j)$
Нормальное	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$	$x_i = \overline{x} + \sigma\left(\sum_{j=1}^{12} r_j - 6\right)$

Параметры гамма-распределения вычислим по следующим формулам:

$$\lambda = \frac{\overline{x}}{\sigma^2};\ \eta = \frac{(\overline{x})^2}{\sigma^2}.$$

Пример 6. Для ПК интенсивность потока отказов λ=1,2 отказов/сутки. Определить последовательность значений продолжительности интервалов между отказами ПК. Известно, что эти интервалы описываются показательным законом распределения. Число реализаций равно 4.

Решение. Определим продолжительность интервала между отказами t_i, используя формулу для моделирования случайной величины, распределенной в соответствии с экспоненциальным законом:

$$t_i = x_i = -\frac{1}{\lambda}\ln r_i.$$

Значения r_i определим по таблице случайных чисел.

Допустим r_1=0,7182; r_2=0,4365; r_3=0,1548; r_4=0,8731.

Тогда

$$t_1 = -\frac{1}{1,2}\ln 0,7182 = 6,6 \text{ суток;}$$

$$t_2 = -\frac{1}{1,2}\ln 0,4365 = 16,6 \text{ суток;}$$

$$t_3 = -\frac{1}{1,2}\ln 0,1548 = 37,3 \text{ суток;}$$

$$t_4 = -\frac{1}{1,2}\ln 0,8731 = 2,7 \text{ суток.}$$

Пример 7. Время обслуживания пассажира в кассе Аэропорта подчинено гамма-распределению. При этом известно среднее значение времени обслуживания $\overline{t} = 42$ мин.; среднее квадратическое отклонение равно 14,8 мин. Требуется смоделировать для заданных условий случайную величину – время X обслуживания пассажира в кассе Аэропорта. Число реализаций равно 3.

Решение.

Определим параметр λ.

$$\lambda = \frac{\overline{x}}{\sigma^2} = \frac{42}{(14,8)^2} = 0,191746.$$

Величину параметра η определим по следующей формуле:

$$\eta = \frac{(\overline{x})^2}{\sigma^2} = \frac{42^2}{(14,8)^2} = 8,74826 \approx 9.$$

Определим время обслуживания пассажира в кассе Аэропорта t_i, используя формулу для моделирования случайной величины, распределенной в соответствии с законом гамма-распределения:

$$t_i = x_i = -\frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^{9}\ln(1-r_j).$$

Значения r_j определим по таблице случайных чисел.

$$x_1 = -\frac{1}{0,19}(\ln(1-0,1) + \ln(1-0,09) + \ln(1-0,73) + \ln(1-0,25) + \ln(1-0,33) +$$
$$+ \ln(1-0,76) + \ln(1-0,52) + \ln(1-0,01) + \ln(1-0,35)) = 25;$$

$$x_2 = -\frac{1}{0,19}(\ln(1-0,86) + \ln(1-0,34) + \ln(1-0,67) + \ln(1-0,35) + \ln(1-0,48) +$$
$$+ \ln(1-0,76) + \ln(1-0,80) + \ln(1-0,95) + \ln(1-0,90)) = 68;$$

$$x_3 = -\frac{1}{0,19}(\ln(1-0,91) + \ln(1-0,17) + \ln(1-0,37) + \ln(1-0,54) + \ln(1-0,20) +$$
$$+ \ln(1-0,48) + \ln(1-0,05) + \ln(1-0,64) + \ln(1-0,89)) = 42.$$

Пример 8. При обработке экспериментальных данных было установлено, что время расходуемое на станции технического обслуживания автомобилей для замены двигателя, распределено по нормальному закону, параметры которого $\overline{x} = 2,8$ час. на один двигатель и $\sigma_{\overline{x}} = 0,6$ час. Требуется смоделировать для отмеченных условий случайную величину – время X, расходуемое для замены двигателя. Число реализаций принять равным 2.

Решение.

Определим время, расходуемое для замены двигателя t_i, используя формулу для моделирования случайной величины, распределенной в соответствии с нормальным законом:

$$t_i = x_i = \bar{x} + \sigma\left(\sum_{j=1}^{12} r_j - 6\right).$$

Значения r_j определим по таблице случайных чисел.

$$x_1 = 2,8 + 0,6(0,1 + 0,09 + 0,73 + 0,25 + 0,33 +$$
$$+ 0,76 + 0,52 + 0,01 + 0,35 + 0,86 + 0,34 + 0,67 - 6) = 2,2;$$
$$x_2 = 2,8 + 0,6(0,35 + 0,48 + 0,76 + 0,80 + 0,95 +$$
$$+ 0,90 + 0,91 + 0,17 + 0,37 + 0,54 + 0,20 + 0,48 - 6) = 3,3.$$

Пример 9. При обработке экспериментальных данных было установлено, что время расходуемое на станции технического обслуживания автомобилей для замены двигателя, распределено по закону Вейбулла, параметры которого $\bar{x} = 40,7$ час. на один двигатель и $\sigma_{\bar{x}} = 30,2$ час. Требуется смоделировать для отмеченных условий случайную величину – время X, расходуемое для замены двигателя. Число реализаций принять равным 3.

Решение.

Вычислим коэффициент вариации случайной величины X:

$$V = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{30,2}{40,7} = 0,742.$$

По таблицам, исходя из значения коэффициента вариации V=0,742, определим параметры a=1,4 и C_a=0,659.

Параметр b вычислим по формуле:

$$b = \frac{\sigma}{C_a} = \frac{30,2}{0,659} = 45,8.$$

Определим время, расходуемое для замены двигателя t_i, используя формулу для моделирования случайной величины, распределенной в соответствии с законом Вейбулла:

$$x_i = b(-\ln r_i)^{\frac{1}{a}}.$$

Значения r_i определим по таблице случайных чисел.

$$x_1 = 45,8 \cdot (-\ln 0,1)^{\frac{1}{1,4}} = 83,1;$$

$$x_2 = 45,8 \cdot (-\ln 0,09)^{\frac{1}{1,4}} = 85,8;$$

$$x_3 = 45{,}8 \cdot (-\ln 0{,}73)^{\frac{1}{1{,}4}} = 20{,}1 \cdot$$

Оценка надежности простейших систем

Пример 10. Система состоит из двух блоков, соединенных последовательно. Система отказывает при отказе хотя бы одного блока. Первый блок содержит два элемента *A* и *B* (они соединены параллельно) и отказывает при одновременном отказе обоих элементов. Второй блок содержит один элемент *C* и отказывает при отказе этого элемента. Найти оценку надежности системы, зная вероятность безотказной работы элементов: $p(A)=0{,}8$, $p(B)=0{,}85$, $p(C)=0{,}6$. Произвести 50 испытаний.

Решение. Выберем из таблицы приложения 4 три случайных числа: 0,1; 0,09 и 0,73; по правилу (если случайное число меньше вероятности события, то событие наступило; если случайное число больше или равно вероятности, то событие не наступило) разыграем события *A*, *B*, *C*, состоящие в безотказной работе соответственно элементов *A*, *B*, *C*. Результаты испытания будем записывать в расчетную таблицу 17.2.

Поскольку $p(A)=0{,}8$ и $0{,}1<0{,}8$, то событие *A* наступило, т.е. элемент *A* в этом испытании работает безотказно. Так как $p(B)=0{,}85$ и $0{,}09<0{,}85$, то событие *B* наступило, т.е. элемент *B* работает безотказно.

Таким образом, оба элемента первого блока работают; следовательно, работает и сам первый блок. В соответствующих клетках таблицы 17.2 ставим знак плюс.

Так как $p(C)=0{,}6$ и $0{,}73>0{,}6$, то событие *C* не наступило, т.е. элемент С получает отказ; другими словами, второй блок, а значит и вся система, получают отказ. В соответствующих клетках таблицы 17.2 ставим знак минус.

Аналогично разыгрываются и остальные испытания. В таблице 17.2 приведены результаты четырех испытаний.

Таблица 17.2

Номер испытания	Блок	Случайные числа, моделирующие элемента			Заключение о работе				
					элементов			блоков	системы
		A	*B*	*C*	*A*	*B*	*C*		
1	Первый Второй	0,01	0,09	 0,73	+	+	 –	+ –	–
2	Первый Второй	0,25	0,33	 0,76	+	+	 –	+ –	–
3	Первый Второй	0,52	0,01	 0,35	+	+	 +	+ +	+
4	Первый Второй	0,86	0,34	 0,67	–	+	 –	+ –	–

Произведя 50 испытаний, получим, что в 28 из них система работала безотказно. В качестве оценки искомой надежности P^* примем относительную частоту $P^*=28/50=0{,}56$.