Моделирование динамических систем

Математические модели динамических систем, в которых выходные переменные изменяются в зависимости от времени или других параметров, описываются с помощью дифференциальных уравнений. На практике динамические системы встречаются очень часто, т.к. большая часть законов механики, электротехники, гидродинамики и т.д. описывается с помощью дифференциальных уравнений, как правило, второго порядка. Поэтому математическая модель любой задачи, связанной с движением тел, с расчетом потоков энергии, материальных ресурсов и т.д. в конечном счете сводится к решению дифференциальных уравнений.

Прямолинейное движение тела под действием силы F: F(t, S, S') = mS''.

На практике лишь небольшое число дифференциальных уравнений допускает интегрирование в квадратурах (сведение решения к численному интегрированию). Еще реже удается получить решение в элементарных функциях, поэтому большое распространение получили численные методы решения дифференциальных уравнений.

Общий вид дифференциального уравнения $F(x, y, y') = 0$, где $y = y(x)$ – неизвестная функция от x.

Нормальная форма дифференциального уравнения: $y' = f(x, y)$.

Дифференциальное уравнение вида $y' = f(x, y)$, в котором неизвестная функция y зависит от одного аргумента x называется **обыкновенным дифференциальным уравнением**, если от нескольких – **уравнением в частных производных**.

Общим решением дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ является семейство функций $y = y(x, C)$. При решении прикладных задач обычно ищут частное решение. Выделение частного решения из семейства общих осуществляется с помощью начальных условий.

Нахождение частного решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего условию $y(x_0) = y_0$, называется задачей Коши.

<u>Постановка задачи Коши:</u>

Дано: $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, $[a; b]$, h

Решить дифференциальное уравнение.

В численных методах задача Коши ставится следующим образом: найти табличную функцию $y_i = f(x_i)$, которая удовлетворяет заданным начальным условиям на участке $[a; b]$ с шагом h.

i	x	y
0		
1	x_1	y_1
2	x_2	y_2
:	:	:
n	x_n	y_n

На графике решение задачи Коши численными методами представляется в виде совокупности узловых точек.

Метод Рунге-Кутта

Наиболее эффективными и часто применяемыми методами решения задачи Коши являются методы Рунге-Кутта. Они основаны на аппроксимации искомой функции y в пределах каждого шага h многочленом, который получен при помощи разложения функции y в ряд Тейлора. Разложим функцию $y(x)$ в окрестности шага h каждой i-й точки:

$$y(x_i + h) = y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2!} y''(x_i) + \ldots \qquad (1)$$

Усекая ряд Тейлора в различных точках Рунге и Кутт обобщили, усовершенствовали и развили методы решения дифференциальных уравнений.

Метод Рунге-Кутта 4-го порядка

В методе Эйлера используется член ряда Тейлора (1), содержащий h. Ошибка метода имеет порядок h^2 .

В модифицированном методе Эйлера используется член ряда (1), содержащий h^2. Ошибка этого метода составляет h^3.

Математики Рунге и Кутт обобщили и развили эти методы. Согласно их классификации, метод Эйлера получил название метода Рунге-Кутта 1-го порядка. Рунге и Кутт предложили методы для решения задачи Коши, в которых более высокая точность решения дифференциальных уравнений может быть достигнута, если в методах сохранять члены ряда Тейлора, содержащие h^3, h^4 и т.д.

Наибольшее распространение получил метод, в котором искомая функция $y(x)$ аппроксимируется рядом Тейлора (1), в котором сохранен член ряда, содержащий h^4. Метод получил название метода Рунге-Кутта 4-го порядка, но в литературе он известен больше как просто метод Рунге-Кутта. Точность этого метода имеет порядок h^5

Для получения значения функции y_{i+1} по методу Рунге-Кутта необходимо определить y''' и y''''. Определяем эти производные используя разделенные разности. Окончательно для определения y_{i+1} выполняется следующая последовательность вычислительных операций:

$$\kappa_1 = h \cdot f(x_i, y_i)$$
$$\kappa_2 = h \cdot f(x_i + h/2, y_i + \kappa_1/2)$$
$$\kappa_3 = h \cdot f(x_i + h/2, y_i + \kappa_2/2)$$
$$\kappa_4 = h \cdot f(x_i + h, y_i + \kappa_3)$$
$$y_{i+1} = y_i + (\kappa_1 + 2\kappa_2 + 2\kappa_3 + \kappa_4)/6 .$$

Пример 2. Составить таблицу значений функции y, определяемой уравнением $y' = y - \frac{2x}{y}$ при начальном условии $y(0)=1$; шаг $h=0{,}2$ в промежутке [0;1].

Решение. Найдем числа

$\kappa_1 = h\cdot f(x_0, y_0)$=0,2·(1–$\frac{2\cdot 0}{1}$)=0,2;

$\kappa_2 = h\cdot f(x_0 + h/2, y_0 + \kappa_1/2)$=0,2$f$(0,1;1,1)=0,2·(1,1–$\frac{2\cdot 0{,}1}{1{,}1}$)=0,1836;

$\kappa_3 = h\cdot f(x_0 + h/2, y_0 + \kappa_2/2)$=0,2$f$(0,1;1,0918)=0,2·(1,0918–$\frac{2\cdot 0{,}1}{1{,}0918}$)=0,1817;

$\kappa_4 = h\cdot f(x_0 + h, y_0 + \kappa_3)$=0,2$f$(0,2;1,1817)=0,2·(1,1817–$\frac{2\cdot 0{,}2}{1{,}1817}$)=0,1686;

$y_1 = y_0 + (\kappa_1 + 2\kappa_2 + 2\kappa_3 + \kappa_4)/6$=1+(0,2+2·0,1836+2·0,1817+0,1686)/6=1,1832.

Таким образом y_1=1,1832 при x_1=0,2.

Аналогично находим y_2.

Найдем числа

$\kappa_1 = h\cdot f(x_1, y_1)$=0,2·(1,1832–$\frac{2\cdot 0{,}2}{1{,}1832}$)=0,169;

$\kappa_2 = h\cdot f(x_1 + h/2, y_1 + \kappa_1/2)$=0,2$f$(0,3;1,2677)=0,2·(1,2677–$\frac{2\cdot 0{,}3}{1{,}2677}$)=0,1589;

$\kappa_3 = h\cdot f(x_1 + h/2, y_1 + \kappa_2/2)$=0,2$f$(0,3;1,2626)=0,2·(1,2626–$\frac{2\cdot 0{,}3}{1{,}2626}$)=0,1575;

$\kappa_4 = h\cdot f(x_1 + h, y_1 + \kappa_3)$=0,2$f$(0,4;1,3407)=0,2·(1,3407–$\frac{2\cdot 0{,}4}{1{,}3407}$)=0,1488;

$y_2 = y_1 + (\kappa_1 + 2\kappa_2 + 2\kappa_3 + \kappa_4)/6$=1,1832+(0,169+2·0,1589+2·0,1575+0,1488)/6=1,3416.

Таким образом y_2=1,3416 при x_2=0,4.

Аналогично находим y_3 и т.д. Процесс вычислений можно вести по такой схеме:

i	x	y	$f(x,y)$	κ_i	
1	0,4	1,3416	0,7455	0,1491	
2	0,5	1,4161	0,71	0,142	y_3=1,4988
3	0,5	1,4869	0,8145	0,1629	x_3=0,6
4	0,6	1,65	0,923	0,1846	
1	0,6	1,4988	0,298	0,1396	
2	0,7	1,5686	0,676	0,1352	y_4=1,6491
3	0,7	1,6362	0,7825	0,1561	x_4=0,8
4	0,8	1,7923	0,8995	0,1799	
1	0,8	1,6491	0,679	0,1358	
2	0,9	1,7169	0,6685	0,1337	y_5=1,7982
3	0,9	1,7838	0,7795	0,1549	x_5=1
4	1	1,9388	0,9075	0,1815	

Таким образом, получаем таблицу

x	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
y	1	1,1832	1,3416	1,4988	1,6491	1,7982

Решение дифференциальных уравнений высоких порядков

Методы Рунге-Кутта можно использовать не только для решения дифференциальных уравнений 1-го порядка $y' = f(x, y)$, но и для решения дифференциальных уравнений более высоких порядков:

$$y^{(m)} = f(x, y, y', y'', \dots , y^{(m-1)}) \qquad (1)$$

Любое дифференциальное уравнение m-го порядка можно свести к системе, состоящей из m дифференциальных уравнений 1-го порядка. Для этого заменим

$$y_1 = y'; \qquad y_2 = y'' = y_1' \qquad y_3 = y''' = y_2' \qquad \dots y_m = y^{(m)} = y_{(m-1)}'.$$

Мы получили систему дифференциальных уравнений 1-го порядка:

$$\begin{cases} y' = y_1 \\ y_1' = y_2 \\ \dots \\ y_m' = f(x, y, y_1, \dots, y_{m-1}) \end{cases} \qquad (2)$$

Получили систему (2) дифференциальных уравнений 1-го порядка. Порядок системы равен m. Неизвестными системы являются m функций $(y, y_1, y_2, \dots, y_m)$.

В прикладных задачах чаще всего решаются дифференциальные уравнения второго порядка. Дифференциальное уравнение второго порядка $y'' = f(x, y, y')$ сведем к системе, состоящей из двух уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} y' = y_1 \\ y'' = f(x, y, y_1) \end{cases}$$

Пример:

$$x^2 y'' - xy' + (x^2 - 1) y = 0$$

$$y'' = \frac{1}{x} y' - \frac{x^2 - 1}{x^2} y$$

$$\begin{cases} y' = y_1 \\ y_1' = \dfrac{1}{x} y_1 - \dfrac{x^2 - 1}{x^2} y \end{cases}$$

Решением полученной системы являются функции y и y_1. Задача Коши для системы дифференциальных уравнений второго порядка должна содержать два начальных условия. В прикладных задачах начальные условия имеют четкий физический смысл.

Решение системы дифференциальных уравнений

Определение 9.8. ***Системой дифференциальных уравнений*** называется система вида

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, \dots, y_n), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, \dots, y_n), \\ \dots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, \dots, y_n), \end{cases}$$

или $\dfrac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, ..., y_n)$, $i = \overline{1,n}$, где x – независимый аргумент, y_i – зависимые функции, $y_i(x_0)=y_{i0}$ – начальные условия.

Определение. Функции $y_i(x)$, при подстановке которых система дифференциальных уравнений обращается в тождество, называется ***решением системы дифференциальных уравнений***.

Для решения системы дифференциальных уравнений используются те же методы, что и для решения одного дифференциального уравнения первого порядка, но необходимо соблюдать условие: на каждом шаге интегрирования, т.е. в точках x_1, x_2, …, x_n все уравнения системы нужно решать параллельно.

1) ***Метод Эйлера***.

$$y_{ij+1} = y_{ij} + hf(x_j, y_{1j}, y_{2j}, ..., y_{nj}),\ i = \overline{1,n},$$

где j – номер шага, $x_{j+1}=x_j+h$.

2) ***Метод Рунге-Кутта четвертого порядка.***

$$y_{ij+1} = y_{ij} + \frac{1}{6}(k_{i1} + 2k_{i2} + 2k_{i3} + k_{i4}),$$

где

$$k_{i1} = hf_i(x_j, y_{1j}, , ..., y_{nj}),$$

$$k_2 = hf_i\left(x_j + \frac{h}{2}, y_{1j} + \frac{k_{11}}{2}, ..., y_{nj} + \frac{k_{n1}}{2}\right),$$

$$k_3 = hf_i\left(x_j + \frac{h}{2}, y_{1j} + \frac{k_{12}}{2}, ..., y_{nj} + \frac{k_{n2}}{2}\right),$$

$$k_4 = hf_i\left(x_j + h, y_{1j} + k_{13}, ..., y_{nj} + k_{n3}\right),$$

$$x_{j+1} = x_j + h.$$

Задания для самостоятельного решения

Задача 1.

а) Численно решить задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения 1-го порядка $\begin{cases} y' = f(t, y), \\ y(t_0) = y0. \end{cases}$ на отрезке $[t_0, T]$, с шагом h=0,2 методом Рунге-Кутты.

№	$f(t,y)$	t_0	T	y_0	№	$f(t,y)$	t_0	T	y_0
1	$y/t + t^2$	1	1,4	0	**6**	$-y/t + 3t$	1	1,4	1
2	$yctgt + 2t\sin t$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$+0,4	0	**7**	$\frac{2ty}{1+t^2} + 1 + t^2$	1	1,4	3
3	$-y\cos t + \frac{\sin(2t)}{2}$	0	0,4	0	**8**	$\frac{2t-1}{t^2}y + 1$	1	1,4	1

4	$-ytgt+\cos^2 t$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}+0{,}4$	0,5	**9**	$-\frac{3y}{t}+\frac{2}{t^3}$	1	1,4	1
5	$\frac{y}{t+2}+t^2+2t$	0,2	0,6	1,5	**10**	$-2ty-2t^3$	1	1,4	e^{-1}

б). Численно решить систему дифференциальных уравнений на отрезке [0;0,2] с шагом h=0,1 методом Рунге-Кутты.

Вариант	Система	t_0	x_0	y_0
1	$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=4x-y\\ \frac{dy}{dt}=x+y\end{cases}$	0	1	2
2	$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=-x-2y\\ \frac{dy}{dt}=3x+4y\end{cases}$	0	1	2
3	$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=2x-y\\ \frac{dy}{dt}=x+2y\end{cases}$	0	2	1
4	$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=x-2y\\ \frac{dy}{dt}=x-y\end{cases}$	0	2	1
5	$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=-7x+y\\ \frac{dy}{dt}=-2x-5y\end{cases}$	0	1	1
6	$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=x+4y\\ \frac{dy}{dt}=x+y\end{cases}$	0	2	2
7	$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=x+y\\ \frac{dy}{dt}=-2x+4y\end{cases}$	0	1	2
8	$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=x-y\\ \frac{dy}{dt}=-4x+4y\end{cases}$	0	2	1

9	$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - 3y \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 2y \end{cases}$	0	1	1
10	$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + y \\ \frac{dy}{dt} = -x - 3y \end{cases}$	0	2	2