Применение метода Монте-Карло для решения задач

Пример (задача о назначениях). Требуется разместить на четырех предприятиях (П1, П2, П3, П4) заказы, связанные с выполнением четырех работ. Каждое предприятие может выполнить любой из заказов, но только один. Затраты (в денежных единицах), связанные с выполнением заказов на каждом из предприятий, приведены в табл.1.

Таблица 1

Предприятия	Заказы			
	1	2	3	4
П1	5	8	12	7
П2	8	9	7	14
П3	8	12	10	13
П4	15	12	9	10

Требуется разместить заказы таким образом, чтобы общая стоимость их выполнения была минимальной.

Алгоритм решения такой задачи на основе метода Монте-Карло реализуется в следующем порядке.

1. Разыгрывается (т.е. случайным образом выбирается) заказ для предприятия П1. Для этого диапазон (0;1) разбивается на четыре интервала: (0; 1/4), (1/4; 1/2), (1/2; 3/4), (3/4; 1) (количество интервалов равно числу заказов, из которых выбирается заказ для первого предприятия). Разыгрывается СРРЧ R_1. Номер заказа, выделяемого предприятию П1, принимается равным номеру интервала, в который попадает число R_1. Например, если $1/4<R_1<1/2$, то предприятию П1 выделяется второй заказ.

2. Разыгрывается заказ для предприятия П2. Для этого диапазон (0; 1) разбивается на три интервала: (0; 1/3), (1/3; 2/3), (2/3; 1). Количество интервалов равно трем, так как для второго предприятия выбирается один заказ из трех оставшихся. Разыгрывается СРРЧ R_2. По номеру интервала выбирается заказ для предприятия П2 (из *трех* оставшихся заказов).

3. Разыгрывается заказ для предприятия П3. Для этого диапазон (0; 1) разбивается на два интервала: (0; 1/2), (1/2; 1). Разыгрывается СРРЧ R_3. По номеру интервала выбирается заказ для предприятия П3 (из *двух* оставшихся заказов).

4. Оставшийся (единственный) заказ выделяется предприятию П4.

5. По результатам шагов 1-4 и по табл.1 определяются суммарные затраты на выполнение всех заказов.

Шаги 1-5 повторяются многократно (например, 1000 раз). Выбирается вариант распределения заказов, для которого общие затраты минимальны.

В табл.2 приведен пример десяти испытаний данного алгоритма.

Таблица 2

Номер испытания	R_1	Заказ для П1	R_2	Заказ для П2	R_3	Заказ для П3	Заказ для П4	Затраты
1	0,0795	1	0,3780	3	0,0593	2	4	5+7+12+10=34
2	0,7602	4	0,2847	1	0,8197	3	2	7+8+10+12=37
3	0,6133	3	0,5766	2	0,9595	4	1	12+9+13+15=49
4	0,0981	1	0,2410	2	0,5962	4	3	5+9+13+9=36

5	0,2978	2	0,6458	3	0,9762	4	1	8+7+13+15=43
6	0,0523	1	0,4523	3	0,8153	4	2	5+7+13+12=37
7	0,4286	2	0,8400	4	0,8754	3	1	8+14+10+15=47
8	0,5900	3	0,3421	2	0,7919	4	1	12+9+13+15=49
9	0,1204	1	0,7492	4	0,3792	2	3	5+14+12+9=40
10	0,7198	3	0,4822	2	0,8215	4	1	12+9+13+15=49

Здесь, например, во втором испытании $0,75<R_1<1$ (предприятию П1 выделяется четвертый заказ); $0<R_2<0,33$ (предприятию П2 выделяется первый заказ); $0,5<R_3<1$ (предприятию П3 выделяется третий заказ); предприятию П4 остается второй заказ.

Таким образом, по результатам десяти испытаний наиболее эффективным решением является следующее: выделить предприятию П1 первый заказ, П2 - третий, П3 - второй, П4 - четвертый. Общие затраты на выполнение всех заказов составят 34 ден.ед.

Пример. Предприятие выпускает датчики четырех типов (A,B,C,D) для автоматизированных систем управления технологическими процессами.

Из опыта работы предприятия известно, что примерно 30% всех заказов составляют заказы на датчики типа A, 20% - B, 15% - C, 35% - D. Все датчики могут выпускаться в обычном исполнении (для работы в обычных условиях) или в специальном исполнении (для работы при высокой влажности, во взрывоопасной среде или при высокой температуре).

Известно, что примерно в 40% всех заказов требуется датчик для работы при высокой влажности, в 15% заказов - для работы во взрывоопасной среде, в 25% заказов – для работы при высокой температуре. При этом к одному датчику может предъявляться несколько дополнительных требований (например, может быть заказан датчик для работы при высокой влажности и температуре).

Затраты предприятия на выпуск одного датчика в обычном исполнении следующие: датчик типа A - 25 ден.ед., B – 15 ден.ед., C – 35 ден.ед., D – 30 ден.ед. Дополнительные затраты предприятия при выпуске датчика для работы при высокой влажности составляют 8 ден.ед., во взрывоопасной среде – 12 ден.ед., при высокой температуре – 10 ден.ед. (эти затраты не зависят от типа датчика).

Датчики, выпущенные в обычном исполнении, продаются по следующим ценам: A – 45 ден.ед., B – 35 ден.ед., C – 60 ден.ед., D – 50 ден.ед. За каждое дополнительное требование цена датчика повышается на 20% от исходной цены.

Например, если будет заказан датчик типа A для работы при высокой влажности и температуре, то затраты на его выпуск составят 25+8+10=43 ден.ед. Он будет продан по цене $45+0,4\cdot45=63$ ден.ед. (т.е. по цене, повышенной на 40%, так как при выпуске датчика выполнены два дополнительных требования). Прибыль от выпуска такого датчика составит 63-43=20 ден.ед.

Требуется разработать алгоритм имитации выпуска датчиков на основе метода Монте-Карло и реализовать его в виде программы. Определить:

а) среднюю прибыль предприятия от выпуска одного датчика; б) долю датчиков специального исполнения (т.е. хотя бы с одним дополнительным требованием) в общем объеме заказов.

Приведем алгоритм имитации выпуска датчиков.

1. Имитируется тип датчика. Для этого разыгрывается СРРЧ R. Если R<0,3, то заказан датчик типа A, если 0,3≤R<0,5 – датчик типа B, если 0,5≤R<0,65 – датчик типа C, если R≥0,65 – датчик типа D.
2. Имитируется исполнение датчика (обычное или специальное). Для этого разыгрываются *три* СРРЧ: R_1, R_2, R_3. Если R_1<0,4, то заказан датчик для работы при высокой влажности. Если R_2<0,15, то заказан датчик для работы во взрывоопасной среде. Если R_3<0,25, то заказан датчик для работы при высокой температуре. Если R_1≥0,4, R_2≥0,15 и R_3≥0,25 (т.е. выполняются все три условия), то заказан датчик в обычном исполнении.

Шаги 1-2 повторяются 100 000 раз. Определяется средняя прибыль предприятия от выпуска одного датчика: отношение суммарной прибыли от выпуска датчиков к общему количеству выпущенных датчиков (100 000). Определяется также доля датчиков специального исполнения как отношение количества случаев, когда к датчику предъявлялось хотя бы одно дополнительное требование, к общему количеству выпущенных датчиков.

Рассмотрим два испытания алгоритма.

Первое испытание. Пусть R=0,0795. Так как R<0,3, заказан датчик типа A. Пусть R_1=0,3780, R_2=0,0593, R_3=0,7602. Так как R_1<0,4, R_2<0,15, R_3≥0,25, заказан датчик для работы при высокой влажности и во взрывоопасной среде. Затраты на его выпуск составят 25+8+12=45 ден.ед. Он будет продан по цене 45+0,4·45=63 ден.ед. (т.е. по цене, повышенной на 40%, так как при выпуске датчика выполнены два дополнительных требования). Прибыль от выпуска датчика составит 63-45=18 ден.ед.

Второе испытание. Пусть R=0,2847. Так как R<0,3, заказан датчик типа A. Пусть R_1=0,8197, R_2=0,6133, R_3=0,5766. Так как R_1≥0,4, R_2≥0,15, R_3≥0,35, заказан датчик в обычном исполнении (т.е. к нему не предъявлено каких- либо дополнительных требований). Затраты на его выпуск составят 25 ден.ед., а цена – 45 ден.ед. Прибыль составит 45-25=20 ден.ед.

Пример. В автоматизированной системе управления технологическим процессом передаются сигналы от производственного оборудования (объекта управления) к управляющему компьютеру. Длительность передачи сигнала - случайная величина, распределенная по экспоненциальному закону со средним значением 5 мс. В канале связи возможны помехи. Интервалы между моментами помех - случайные величины, распределенные по экспоненциальному закону. Помехи возникают в среднем 20 раз в секунду. Если во время передачи сигнала возникает хотя бы одна помеха, то сигнал искажается.

Требуется разработать алгоритм и программу имитации передачи сигналов на основе метода Монте-Карло. Определить вероятность передачи сигнала без искажений.

Так как *интервалы времени* между помехами представляют собой экспоненциальные случайные величины, *количество* помех за некоторый интервал времени *t* представляет собой случайную величину, распределенную по пуассоновскому закону с параметром $\lambda=\Lambda t$, где Λ – интенсивность потока помех. В данном примере Λ=20 помех/с, или 0,02 помехи/мс.

Приведем алгоритм имитации процесса передачи сигналов.

1. Выполняется имитация времени передачи сигнала (*t*). Для этого разыгрывается экспоненциальная случайная величина при $\bar{X}=5$.

2. Разыгрывается количество помех (*m*) за время передачи сигнала *t*. Для этого используется алгоритм имитации пуассоновской случайной величины, при $\lambda=0{,}02t$.

3. Если *m*=0 (за время передачи сигнала не было ни одной помехи), то сигнал не искажен.

4. Шаги 1-3 повторяются многократно (например, 100 000 раз). Вычисляется вероятность передачи сигнала без искажений как отношение количества сигналов, переданных без искажений, к общему количеству смоделированных сигналов (количеству испытаний).

Алгоритм имитации пуассоновской случайной величины:

Имитация пуассоновской случайной величины

Пуассоновская случайная величина – это величина, принимающая значения *m*=0, 1, 2,… с вероятностями, определяемыми по следующей формуле:

$$P_m=\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda},$$

где λ – параметр распределения (т.е. некоторое число).

Таким образом, пуассоновская случайная величина может принимать любые неотрицательные целочисленные значения (от нуля до бесконечности).

Например, пуассоновскому закону распределения соответствует количество событий в пуассоновском потоке [15, 16], происходящих за некоторый интервал времени *t*. В этом случае $\lambda=\Lambda t$, где Λ – интенсивность потока событий (т.е. среднее количество событий, происходящих в единицу времени).

Для имитации пуассоновской случайной величины применяется следующий алгоритм.

1. Значение моделируемой величины принимается равным нулю: *m*=0.

2. Вычисляется значение вспомогательной переменной P_0: $P_0=e^{-\lambda}$.

3. Вспомогательная переменная *Q* принимается равной единице: *Q*=1.

4. Разыгрывается СРРЧ *R*.

5. Вычисляется новое значение вспомогательной переменной Q: $Q=Q \cdot R$.

6. Если $Q \geq P_0$, то значение моделируемой величины увеличивается на единицу ($m=m+1$), и выполняется возврат к шагу 4. Если $Q<P_0$, то алгоритм завершается. Смоделированное значение пуассоновской случайной величины равно m.

Пример. Предприятие выпускает электроприборы, состоящие из четырех блоков. Прибор продолжает работать, пока исправен хотя бы один блок. Время безотказной работы каждого блока - случайная величина, распределенная по экспоненциальному закону; среднее время безотказной работы блока – два года. Срок действия гарантии на прибор - один год.

Требуется разработать алгоритм и программу имитации работы прибора на основе метода Монте-Карло. Определить: а) среднее время безотказной работы прибора; б) вероятность безотказной работы прибора в течение гарантийного срока.

При разработке алгоритма решения этой задачи под временем безотказной работы прибора будем понимать время, в течение которого прибор продолжает работать (даже если некоторые из блоков, входящих в состав прибора, отказали).

Приведем алгоритм имитации работы прибора.

1. Разыгрываются значения времени безотказной работы каждого из блоков (t_{rb1}, t_{rb2}, t_{rb3}, t_{rb4}) – четыре случайных величины, распределенные по экспоненциальному закону с $\bar{X}=2$.

2. Определяется время безотказной работы прибора – максимальная из величин, разыгранных на шаге 1 (так как прибор продолжает работать, пока исправен хотя бы один из блоков): $t_{rp}=max(t_{rb1}, t_{rb2}, t_{rb3}, t_{rb4})$.

3. Если $t_{rp} \geq 1$ (т.е. не менее одного года), то прибор отработал гарантийный срок без отказа.

Шаги 1-3 повторяются многократно (например, 100 000 раз). По окончании испытаний вычисляются величины, которые требуется определить по результатам моделирования. *Среднее время безотказной работы прибора* определяется как отношение суммы значений времени безотказной работы всех приборов (т.е. суммы величин t_{rp}) к количеству этих приборов. *Вероятность безотказной работы в течение гарантийного срока* вычисляется как отношение количества приборов, отработавших гарантийный срок без отказа, к общему количеству приборов.

Пример. Между тремя предприятиями (П1,П2,П3) распределяется сумма в размере 5 млн ден.ед. Средства выделяются в размерах, кратных 1 млн ден.ед. Прибыль, которая может быть получена предприятиями в зависимости от выделенных средств, приведена в табл.1.

Таблица 1

Вложенные средства, млн ден.ед.		1	2	3	4	5
Прибыль предприятия, млн	П1	2	4	7	9	10

ден.ед.	П2	2	3	6	8	11
	П3	3	4	5	9	11

Например, если предприятию П1 будет выделено 2 млн ден.ед., то его прибыль от использования этих средств составит 4 млн ден.ед.

Требуется распределить имеющуюся сумму таким образом, чтобы общая прибыль, полученная предприятиями, была максимальной.

Для такой задачи можно найти точное решение, используя метод динамического программирования. Однако при большой размерности задачи, т.е. при большом количестве предприятий и большом объеме распределяемых средств, применение этого метода становится достаточно сложным.

Решим данную задачу, используя метод Монте-Карло. Для случайного выбора величины средств, выделяемых предприятию, будет использоваться формула (1)

$$X = [A+(B-A+1)\cdot R] \qquad (1)$$

где R – СРРЧ;

[ ] – выделение целой части числа.

Алгоритм решения рассматриваемой задачи на основе метода Монте-Карло реализуется в следующем порядке.

1. Разыгрывается (т.е. случайным образом выбирается) величина средств, выделяемых первому предприятию. Для этого разыгрывается случайное число R_1 и используется формула (1) при A=0, B=5: $S_1=[0+(5-0+1)\cdot R_1]$.
2. Если первому предприятию выделены не все средства (т.е. $S_1 < 5$), то разыгрывается величина средств, выделяемых второму предприятию. Для этого разыгрывается СРРЧ R_2 и используется формула (1) при A=0, $B=5-S_1$, $S_2=[0+(5-S_1-0+1)\cdot R_2]$.
3. Оставшиеся средства (если они есть) выделяются третьему предприятию: $S_3=5-S_1-S_2$.
4. По величинам выделенных средств (S_1, S_2, S_3) и по соответствующим значениям прибыли (табл.1) определяется суммарная прибыль предприятий.
5. Шаги 1-4 повторяются многократно (например, 1000 раз). Выбирается вариант распределения средств, для которого значение суммарной прибыли максимально.

Приведем пример десяти испытаний данного алгоритма (табл.2).

Таблица 2

Номер испытания	R_1	S_1	R_2	S_2	S_3	Прибыль
1	0,0795	0	0,3780	2	3	0+3+5=8
2	0,0593	0	0,7602	4	1	0+8+3=11
3	0,2847	1	0,8197	4	0	2+8+0=10
4	0,6133	3	0,5766	1	1	7+2+3=12
5	0,9595	5	-	0	0	10+0+0=10
6	0,0981	0	0,2410	1	4	0+2+9=11
7	0,5962	3	0,2978	0	2	7+0+4=11
8	0,6458	3	0,9762	2	0	7+3+0=10

9	0,0523	0	0,4523	2	3	0+3+5=8
10	0,8153	4	0,4286	0	1	9+0+3=12

Здесь, например, в первом испытании S_1=[0+(5-0+1)·0,0795]=0, S_2=[0+(5-0+1)·0,3780]=2, S_3=5-0-2=3. В этом испытании предприятию П1 средства не выделяются, предприятию П2 выделяется 2 млн ден.ед., предприятию П3 – оставшиеся 3 млн ден.ед. Из табл.4.6 видно, что при таком распределении средств предприятие П1 не получит прибыли, П2 – получит прибыль в размере 3 млн ден.ед., П3 – прибыль в размере 5 млн ден.ед. Таким образом, общая прибыль предприятий составит 8 млн ден.ед.

Как видно из табл.2, по результатам десяти испытаний найдены два варианта решения, обеспечивающие максимальную прибыль. Первый вариант - выделить предприятию П1 3 млн ден.ед., П2 - 1 млн, П3 - 1 млн. Второй вариант – выделить предприятию П1 4 млн ден.ед., П3 - 1 млн (предприятию П2 средства не выделяются). Общая прибыль предприятий (для любого из этих вариантов решения) составит 12 млн ден.ед.