***Моделирование показателей надежности технических систем с использованием аппарата Марковских случайных процессов.***

**Цель работы -** научиться находить показатели надежности системы с использованием аппарата Марковских случайных процессов.

## Пример выполнения работы

Надежность как качественная характеристика всегда принималась во внимание при решении различных вопросов эксплуатации и технического обслуживания. Количественное определение надежности появилось с возникновением теории надежности. Математической платформой теории надежности являются теория вероятностей и математическая статистика. В качестве основной количественной меры надежности технических систем принята вероятность безотказной работы.

*Вероятность безотказной работы* – это вероятность того, что за определенное время работы системы и в заданных условиях эксплуатации отказа не происходит.

Для моделирования вероятности безотказной работы автотранспортного предприятия (коэффициента выпуска автомобилей) воспользуемся аппаратом Марковских дискретных случайных процессов с непрерывным временем. Представим автомобиль как некоторую систему S с дискретными состояниями $S_1$, $S_2$, …, $S_n$, которая переходит из состояния в состояние под влиянием случайных событий (отказов).

На стадии прогнозирования работы автомобиля целесообразно рассматривать следующие состояния, в которых подвижной состав может находиться в процессе эксплуатации и которые характеризуются целодневными простоями: $S_0$ – исправен, работает; $S_1$ – находится на капитальном ремонте (КР); $S_2$ – проходит ТО-2; $S_3$ – находится на текущем ремонте (ТР); $S_4$ – исправен, не работает по организационным причинам (без водителя, шин, запасных частей); $S_5$ – не работает, снятие агрегата для отправки на капитальный ремонт; $S_6$ – не работает, списание агрегата, замена на новый; $S_7$ – исправен, не работает (выходные и праздничные дни); $S_8$ – списывается.

Рассматриваемые состояния $S_j$ автомобиля характеризуются средним числом дней пребывания автомобиля в каждом $j$-ом состоянии ($j$=1,2,…,$n$) $Д_j$. Отношение

$$P_j = \frac{Д_j}{Д_k},$$

где $Д_к$ – число календарных дней в году, есть вероятность нахождения автомобиля в $j$-ом состоянии.

Вероятности $P_j$ являются функциями пробега автомобиля $P_j(L)$.

Вероятность нахождения автомобиля в состоянии $S_1$ («исправен, работает») $P_1(L)$ представляет собой коэффициент выпуска автомобиля – один из основных показателей работы автопредприятия.

Возможные переходы автомобиля из состояния S$_i$ в состояние S$_j$, описаны матрицей переходов.

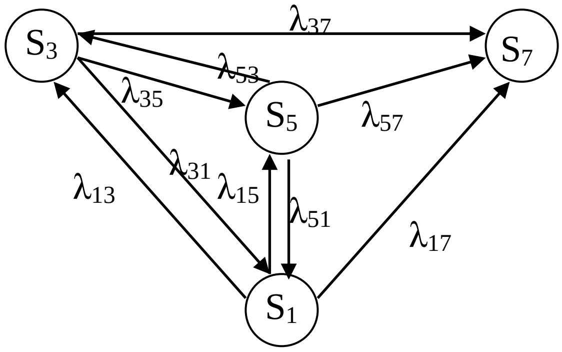
$$p_{ij} = \begin{array}{c} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} 1 & 3 & 5 & 7 \end{matrix} \end{array}$$

Соответствующие интенсивности потоков событий $\lambda_{ij}$, переводящих автомобиль из состояния S$_i$ в состояние S$_j$, определяются по формулам, приведенным в таблице:

| Состояние | Интенсивность | Примечание |
|---|---|---|
| проходит техническое обслуживание | $\lambda_{12}(L) = \dfrac{1}{L_{mo}}$ | $L_{mo}$ – пробег автомобиля до ТО-2, тыс.км. |
| находится в текущем ремонте | $\lambda_{13}(L) = \exp(-0{,}8 + 0{,}08L)$ | |
| находится в капитальном ремонте | $\lambda_{14}(L) = \exp(-0{,}3 + 0{,}002L)$ | |
| проводится замена агрегата | $\lambda_{15}(L) = \exp(-0{,}4 + 0{,}004L)$ | |
| исправен, не работает по организационным причинам | $\lambda_{16}(L) = \dfrac{1}{l_{cc}T_{орг}}$ | $l_{cc}$ – среднесуточный пробег, тыс. км;<br>$T_{орг}$ – дни простоя по организационным причинам. |
| исправен, не работает, выходные и праздничные дни | $\lambda_{17}(L) = \dfrac{1}{l_{cc}T_{вых}}$ | $T_{вых}$ – праздничные и выходные дни |
| списывается | $\lambda_{18}(L) = \dfrac{L - L_0}{S}$ | $L_0$ – 400 тыс. км;<br>$S$ – 300 тыс. км. |

Для приведения всех интенсивностей перехода $\lambda_{ij}$ к единым единицам измерения 1/день(сутки) интенсивности перехода из 1-го состояния (автомобиль исправен) во все $j$-е состояния $\lambda_{ij}$ при составлении дифференциальных уравнений умножаются на коэффициент $l_{cc}$ (среднесуточный пробег).

Для анализа процесса эксплуатации автомобиля как случайного процесса с дискретными состояниями воспользуемся графом состояний




Определим интенсивности потоков событий $\lambda_{ij}$, переводящих автомобиль из состояния $S_i$ в состояние $S_j$.

*Исходные данные:*

среднесуточный пробег – $l_{cc}$=0,25 тыс. км;

среднее время простоя автомобиля в текущем ремонте – $T_3$=1 день;

Остальные данные выбираются, исходя из профессиональных соображений:

праздничные и выходные дни – $T_{вых}$=60 дней;

среднее время замены агрегата – $T_5$=5 дней;

$$\lambda_{13} = exp(-0{,}8 + 0{,}08L);$$

$$\lambda_{15} = exp(-0{,}4 + 0{,}004L);$$

$$\lambda_{17} = \frac{1}{l_{cc}T_{вых}} = \frac{1}{0{,}25 \cdot 60} = 0{,}0667;$$

$$\lambda_{31} = \frac{1}{T_3} = \frac{1}{1} = 1;$$

$$\lambda_{35} = 0{,}1;$$

$$\lambda_{37} = 0{,}01;$$

$$\lambda_{51} = \frac{1}{T_5} = \frac{1}{5} = 0{,}2;$$

$$\lambda_{53} = 0{,}02;$$

$$\lambda_{57} = 0{,}002.$$

Составим систему дифференциальных уравнений Колмогорова для вероятностей состояний $P_i$, где $i$=1, 3, 5, 7:

$$\frac{dP_1}{dL} = -P_1(\lambda_{13} + \lambda_{15} + \lambda_{17})l_{cc} + \lambda_{31}P_3 + \lambda_{51}P_5;$$

$$\frac{dP_3}{dL} = -P_3(\lambda_{31} + \lambda_{35} + \lambda_{37}) + \lambda_{13}P_1 l_{cc} + \lambda_{53}P_5;$$

$$\frac{dP_5}{dL} = -P_5(\lambda_{51} + \lambda_{53} + \lambda_{57}) + \lambda_{15}P_1 l_{cc} + \lambda_{35}P_3;$$

$$\frac{dP_7}{dL} = \lambda_{17} P_1 l_{cc} + \lambda_{37} P_3 + \lambda_{57} P_5.$$

Решим эту систему методом Рунге-Кутта в Python (https://trinket.io/features/python3) при следующих условиях:

а) пределы интегрирования: нижний – 0, верхний – 35;

б) шаг интегрирования – 0,5;

в) начальные условия: $P_1(L)$=1, $P_3(L)$= $P_5(L)$= $P_7(L)$=0;

г) получим результаты в точках 1,5,10,15,20,25,30 с точностью $\varepsilon=10^{-3}$.

Запишем систему в виде:

$$f_1(L, P_1, P_3, P_5, P_7) = \frac{dP_1}{dL} = -P_1(\lambda_{13} + \lambda_{15} + \lambda_{17}) l_{cc} + \lambda_{31} P_3 + \lambda_{51} P_5;$$

$$f_3(L, P_1, P_3, P_5, P_7) = \frac{dP_3}{dL} = -P_3(\lambda_{31} + \lambda_{35} + \lambda_{37}) + \lambda_{13} P_1 l_{cc} + \lambda_{53} P_5;$$

$$f_5(L, P_1, P_3, P_5, P_7) = \frac{dP_5}{dL} = -P_5(\lambda_{51} + \lambda_{53} + \lambda_{57}) + \lambda_{15} P_1 l_{cc} + \lambda_{35} P_3;$$

$$f_7(L, P_1, P_3, P_5, P_7) = \frac{dP_7}{dL} = \lambda_{17} P_1 l_{cc} + \lambda_{37} P_3 + \lambda_{57} P_5.$$

Код программы:

main.py inflammation-01.csv

```
import numpy as np
from scipy. integrate import odeint
import matplotlib.pyplot as plt
import math
 # create function
def f(y, t):
  y1, y2 , y3, y4 = y
  return [-y1*(math.exp(-0.8+0.08*t)+math.exp(-0.4+0.004*t)+0.0667)*0.25+1*y2+0.2*y3,
  -y2*(1+0.1+0.01)+y1*0.25*math.exp(-0.8+0.08*t)+0.02*y3,
  -y3*(0.2+0.02+0.002)+math.exp(-0.4+0.004*t)*y1*0.25+0.1*y2,
  0.0667*y1*0.25+0.01*y2+0.002*y3]

t = np.linspace( 1, 30, 15) # vector of time
y0 = [1,0,0,0] # start value
w = odeint(f, y0, t) # solve eq.
y1 = w[:,0]
y2 = w[:,1]
y3 = w[:,2]
y4 = w[:,3]
fig = plt.figure(facecolor='white')
plt.plot(t, y1, '-o',t, y2, '-o',t, y3, '-o',t, y4, '-o', linewidth=1)
plt.ylabel("p")
plt.xlabel("t")
plt.grid(True)
plt.show() # display
```

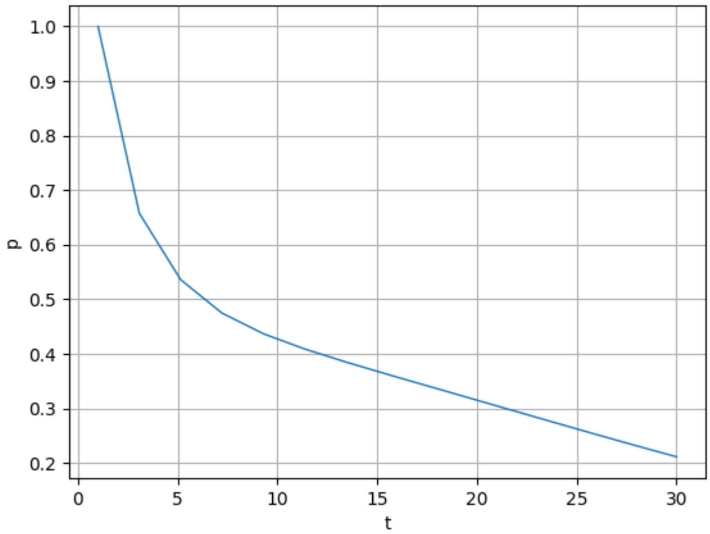



Рис. 1.2. График зависимости коэффициента выпуска от пробега

Получим результаты в точках 1,5,10,15,20,25,30 с точностью $\varepsilon=10^{-3}$ (таблица 1.1).

Таблица 1.1.

| $L$ | $P_1(L)$ | $P_3(L)$ | $P_5(L)$ | $P_7(L)$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,787 | 0,0622 | 0,136 | 0,0152 |
| 5 | 0,512 | 0,0824 | 0,345 | 0,0614 |
| 10 | 0,419 | 0,0972 | 0,376 | 0,108 |
| 15 | 0,364 | 0,123 | 0,363 | 0,15 |
| 20 | 0,312 | 0,156 | 0,344 | 0,188 |
| 25 | 0,260 | 0,193 | 0,323 | 0,224 |
| 30 | 0,209 | 0,232 | 0,302 | 0,257 |

**Порядок выполнения работы**

В процессе эксплуатации ЭВМ может рассматриваться как физическая система S, которая в результате проверки может оказаться в одном из следующих состояний:

$S_1$ – ЭВМ полностью исправна;

$S_2$ – ЭВМ имеет незначительные неисправности в оперативной памяти, при которых она может решать задачи;

$S_3$ – ЭВМ имеет существенные неисправности и может решать ограниченный класс задач;

$S_4$ – ЭВМ полностью вышла из строя;

$S_5$ – ЭВМ находится на профилактике;

$S_6$ – ЭВМ не работает по организационным причинам;

$S_7$ – ЭВМ не работает, выходные и праздничные дни;

$S_8$ – ЭВМ списывается.

Рассматриваемые состояния $S_j$ ЭВМ характеризуются средним числом дней пребывания ЭВМ в каждом $j$-ом состоянии ($j$=1,2,…,8) $Д_j$. Отношение

$$P_j = \frac{Д_j}{Д},$$

где $Д$ – возможное время работы ЭВМ в данный период (месяц, квартал, год и т.д.), можно трактовать как вероятность нахождения ЭВМ в $j$-ом состоянии.

Вероятности $P_j$ являются функциями времени $P_j(t)$.

Вероятность нахождения ЭВМ в состоянии $P(t)=P_1(t)+P_2(t)$ может быть истолкована как вероятность безотказной работы ЭВМ, т.е. как один из показателей надежности технической системы.

Возможные переходы системы S-ЭВМ из состояния $S_i$ в состояние $S_j$, описаны матрицей переходов.

Соответствующие интенсивности потоков событий $\lambda_{ij}$, переводящих ЭВМ из состояния $S_i$ в состояние $S_j$, определяются по формулам, приведенным в таблице:

| Интенсивность | Примечание |
|---|---|
| $\lambda_{12}(t) = \frac{0{,}25}{T_н}$ | $T_н$ – среднее время работы ЭВМ до появления незначительной неисправности;<br>$T_н = 0{,}1 \cdot T$,<br>где $T$ – общее возможное время работы ЭВМ за данный период |
| $\lambda_{13}(t) = 0{,}25\exp(-0{,}8 + 0{,}08t)$ | |
| $\lambda_{14}(t) = 0{,}22\exp(-0{,}3 + 0{,}002t)$ | |
| $\lambda_{15}(t) = 0{,}24\exp(-0{,}4 + 0{,}004t)$ | |
| $\lambda_{16}(t) = \frac{1}{T_{орг}}$ | $T_{орг}$ – среднее время простоя ЭВМ по организационным причинам. |
| $\lambda_{17}(t) = \frac{1}{T_{вых}}$ | $T_{вых}$ – среднее время простоя в праздничные и выходные дни. |
| $\lambda_{18}(t) = \frac{t - t_0}{S}$ | $t_0$ = 1200 тыс. ч;<br>$S$ = 72000 тыс. ч.<br>$\lambda_{18}(t) = 0$ при $t \le 1200$ тыс. ч. |

*Требуется*:

1. Построить размеченный граф состояний системы S-ЭВМ по заданной матрице переходов.

2. Определить интенсивности $\lambda_{ij}$, используя формулы из таблицы.

Остальные интенсивности определяются по формулам

$$\lambda_{ij} = \frac{1}{T_i},$$

где $T_i$ – среднее время пребывания в $i$-м состоянии за данный период.

3. Составить систему дифференциальных уравнений Колмогорова и решить ее методом Рунге-Кутта при следующих условиях:

а) пределы интегрирования: нижний – 0, верхний – 50;

б) шаг интегрирования – 0,5;

в) начальные условия: $P_1(t)=1$, $P_j(t)=0$, $(j=2,3,\ldots,n)$;

г) получить результаты в точках 1,5,10,15,…,50 с точностью $E=10^{-3}$.

4. Получить значения вероятности безотказной работы ЭВМ $P(t)$ и построить график зависимости вероятности от времени $t$.

## Варианты заданий

Матрицы возможных переходов:

**1 вариант**

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 3 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

**2 вариант**

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 4 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 7 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |

**3 вариант**

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

**4 вариант**

| | 1 | 2 | 3 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 3 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 5 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 6 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |

**5 вариант**

| | 1 | 2 | 4 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 4 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 7 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

**6 вариант**

| | 1 | 2 | 5 | 6 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 5 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 6 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

**7 вариант**

| | 1 | 3 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 3 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 5 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 6 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 7 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |

**8 вариант**

| | 1 | 2 | 3 | 5 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 3 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 5 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

**9 вариант**

| | 1 | 2 | 5 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 5 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 7 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

**10 вариант**

| | 1 | 2 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 5 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 6 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 7 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |

## Содержание отчета

Отчет должен содержать:

1. размеченный граф состояний системы по заданной матрице переходов;
2. Интенсивности потоков событий $\lambda_{ij}$, переводящих ЭВМ из состояния $S_i$ в состояние $S_j$;
3. систему дифференциальных уравнений Колмогорова;
4. решение системы в python;
5. значения вероятности $P(t)$ безотказной работы ЭВМ;
6. график зависимости вероятности $P(t)$ безотказной работы ЭВМ от времени.

## Контрольные вопросы

1. Основные понятия Марковских случайных процессов: случайная функция; случайный процесс; Марковские процессы; виды Марковских процессов; граф состояний.
2. Марковская цепь: вероятности состояний; начальное распределение; вероятность перехода; установившийся режим; однородная цепь.
3. Непрерывная цепь Маркова: плотность вероятностей; однородные и неоднородные процессы; размеченный граф состояний.
4. Поток событий; интенсивность потока; пуассоновский поток; простейший поток; свойства простейшего потока: стационарность, ординарность, отсутствие последствий; нестационарный пуассоновский поток.
5. Процесс гибели и размножения: понятие процесса; процесс чистой гибели, процесс чистого размножения; нахождение предельных вероятностей.
6. Уравнения Колмогорова: вид системы; поток вероятности перехода; правила составления уравнений по графу состояний и по матрице плотностей вероятностей.
7. Предельные вероятности состояний: понятие; стационарный режим; предельная вероятность; правило составления системы дифференциальных уравнений для нахождения предельных вероятностей.