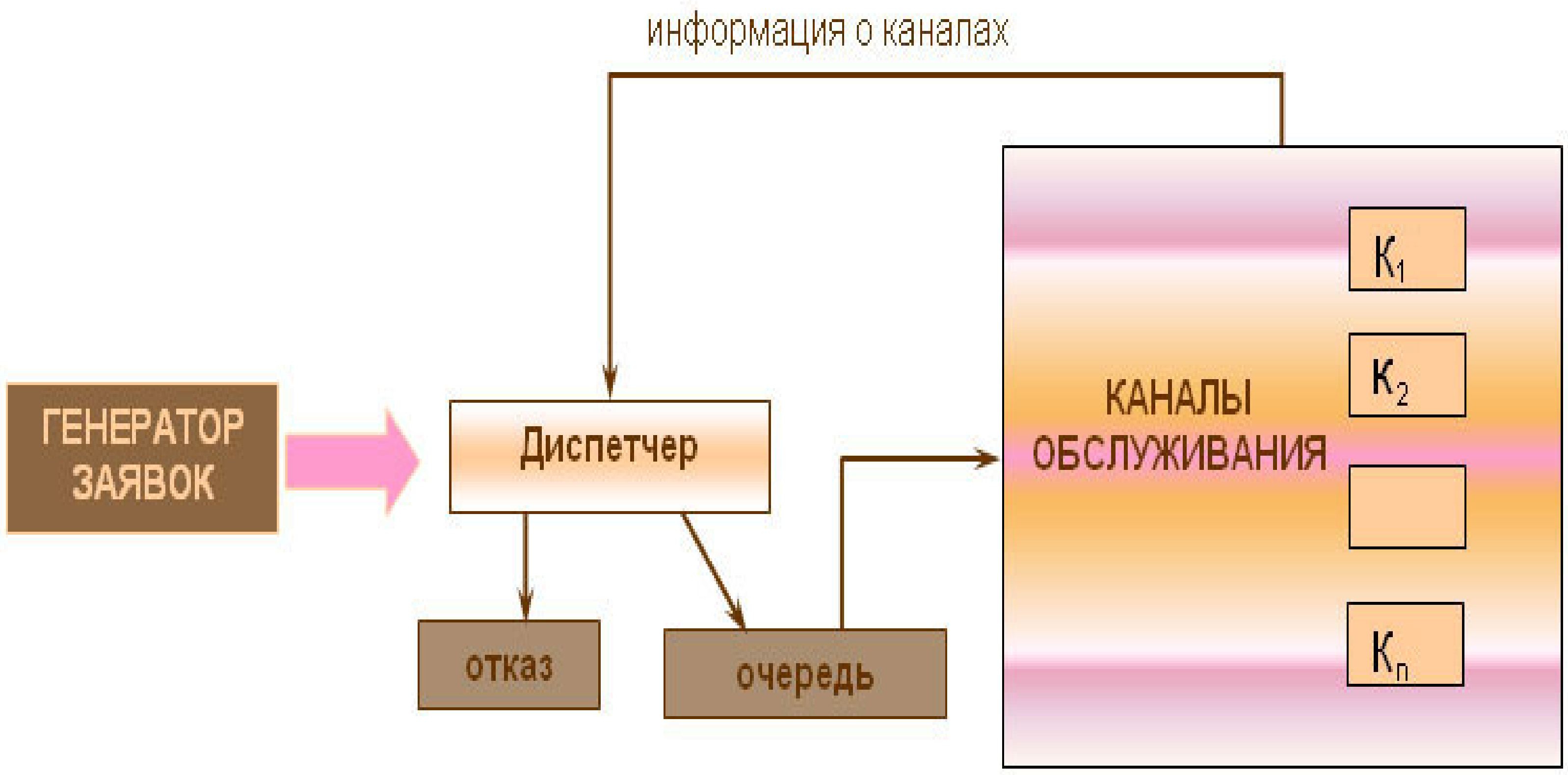
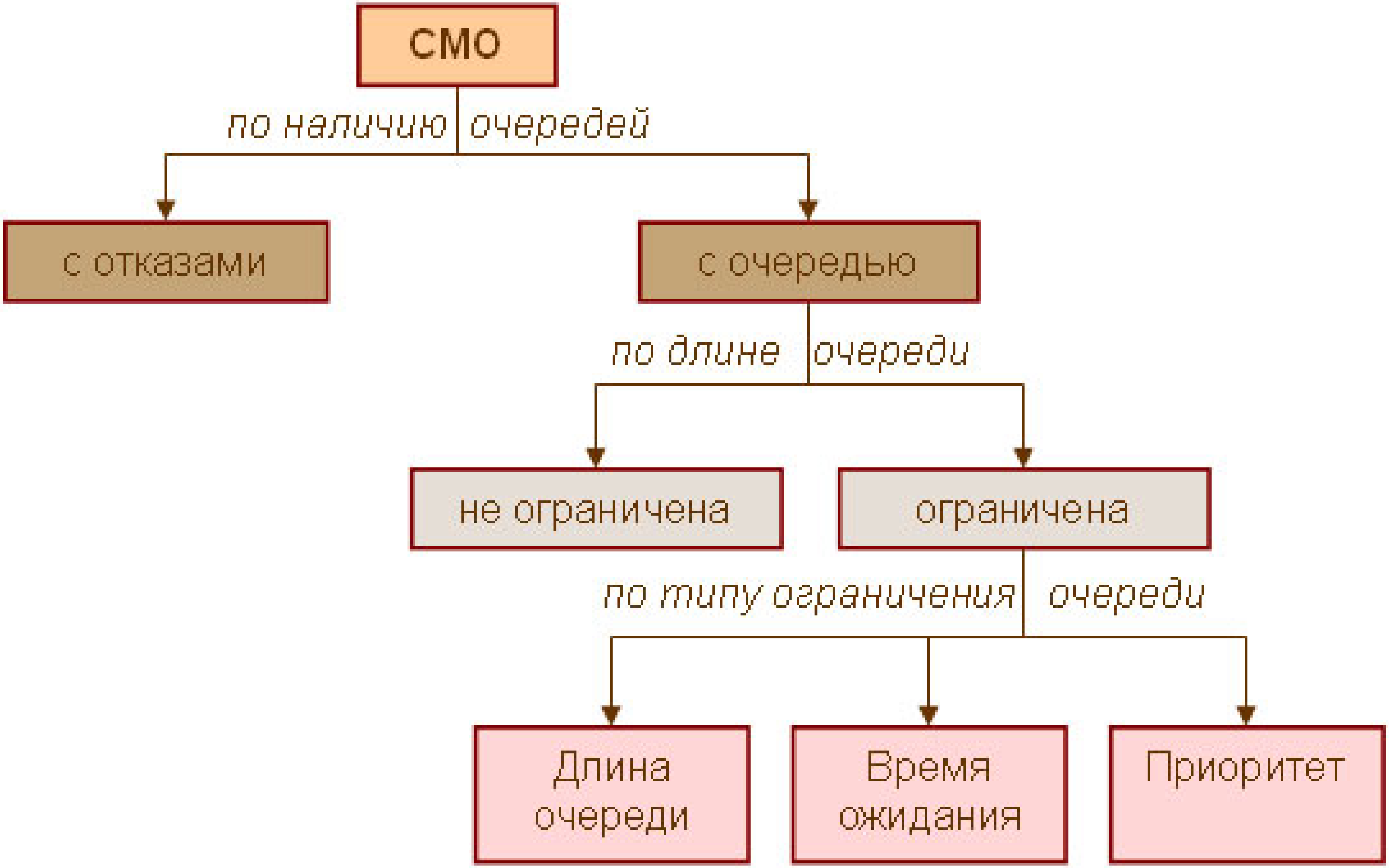
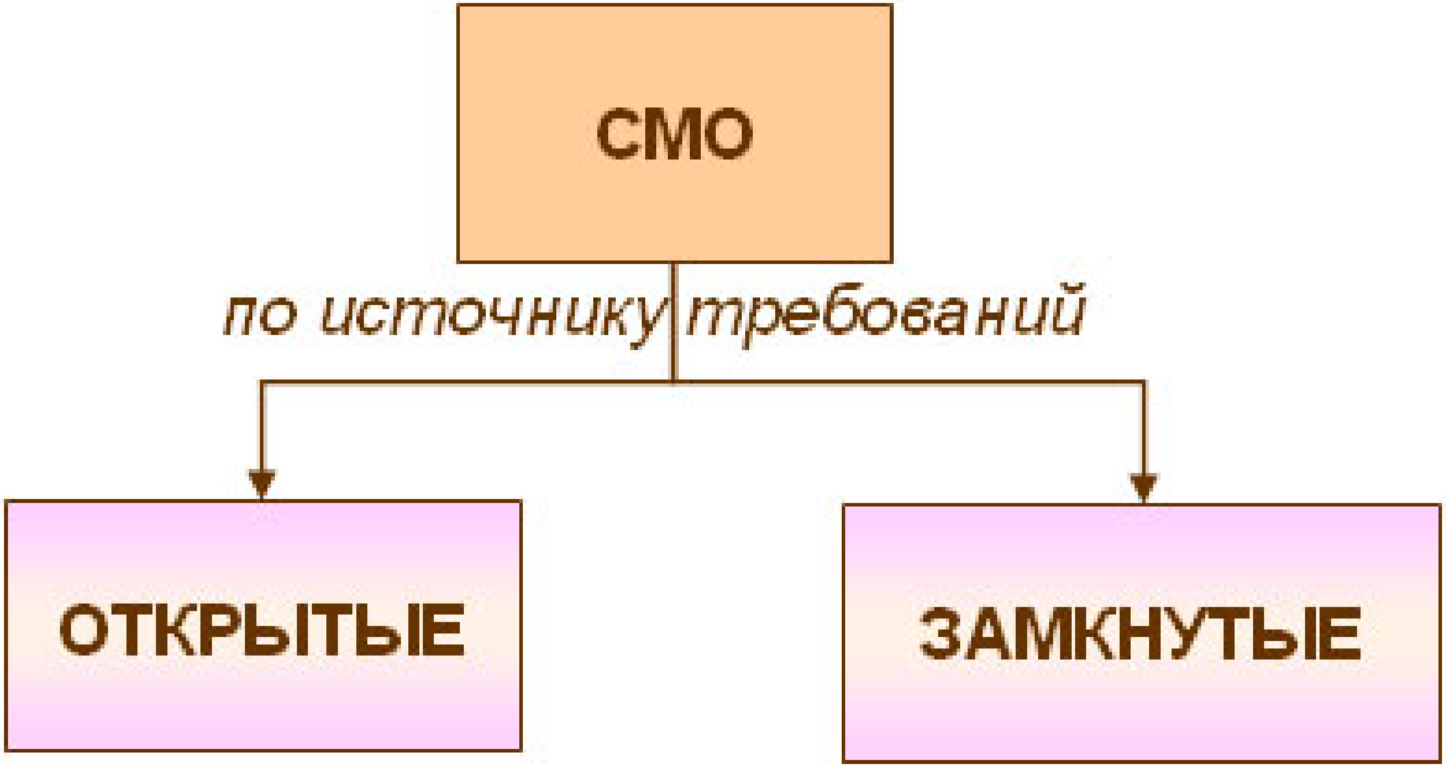
Системы массового обслуживания


Интенсивность обслуживания
$\varphi = \frac{\lambda}{\mu}$
Поток обслуженных требований
Поток требований на обслуживание
λ
Аппарат обслуживания (μ)
СИСТЕМА МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ



информация о каналах
ГЕНЕРАТОР ЗАЯВОК
Диспетчер
отказ
очередь
КАНАЛЫ ОБСЛУЖИВАНИЯ
K_1
K_2
K_n


СМО
по наличию очередей
с отказами
с очередью
по длине очереди
не ограничена
ограничена
по типу ограничения очереди
Длина очереди
Время ожидания
Приоритет


СМО
по источнику требований
ОТКРЫТЫЕ
ЗАМКНУТЫЕ

Системы массового обслуживания(СМО)

Основные элементы СМО:

- Входной поток заявок
- Очередь
- Каналы обслуживания
- Выходной поток заявок

2. Системы массового обслуживания(СМО).

Показатели эффективности работы СМО:

- Абсолютная пропускная способность (А);
- Относительная пропускная способность (Q);
- Приведенная интенсивность (ρ);
- Средняя продолжительность периода занятости СМО (время обслуживания заявок);
- Коэффициент использования СМО (время обслуживания заявок/время работы системы).

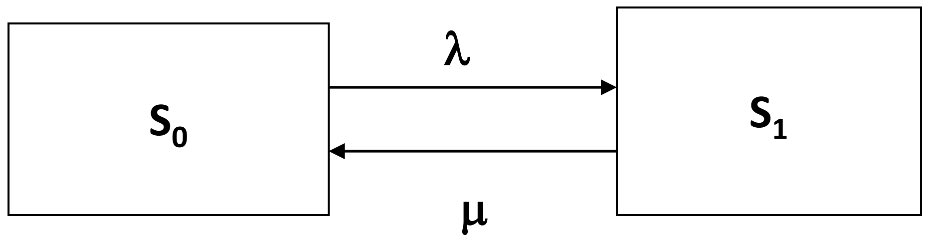
2. Системы массового обслуживания(СМО).

Показатели качества обслуживания заявок:

- Среднее время ожидания заявки в очереди (T_{line});
- Среднее время пребывания заявки в СМО (T_{sys});
- Вероятность отказа заявки в обслуживании без ожидания;
- Вероятность немедленного приема заявки;
- Закон распределения времени ожидания заявки в очереди в СМО;
- Среднее число заявок в очереди (N_{line});
- Среднее число заявок, находящихся в СМО (N_{sys}).

3. Одноканальная СМО с отказами.

Граф состояний СМО



Система уравнений Колмогорова

$$\begin{cases} p_0' = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t), \\ p_1' = -\mu p_1(t) + \lambda p_0(t). \end{cases}$$

3. Одноканальная СМО с отказами.

Нормировочное условие

$$p_0 + p_1 = 1$$

Предельные значения вероятностей состояния СМО

$$p_0 = \mu / (\lambda + \mu);$$

$$p_1 = \lambda / (\lambda + \mu).$$

3. Одноканальная СМО с отказами.

Основные характеристики работы СМО

Относительная пропускная способность (Q)

$$Q = \mu / (\lambda + \mu)$$

Абсолютная пропускная способность (A)

$$A = \lambda \mu / (\lambda + \mu) = \lambda Q$$

Вероятность отказа в обслуживании заявки, когда канал занят:

$$p_1 = \lambda / (\lambda + \mu)$$

3. Одноканальная СМО с отказами.

Основные характеристики работы СМО

Среднее время обслуживания заявки:

$$\overline{T}_S = 1/\mu$$

Среднее время простоя канала:

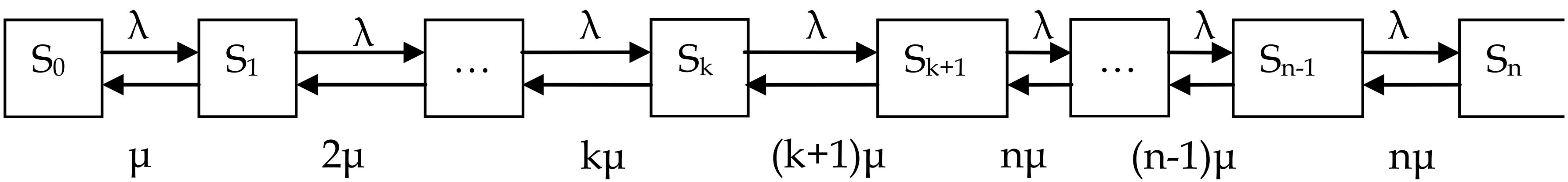
$$\overline{T}_{st} = 1/\lambda$$

Среднее время пребывания заявки в системе:

$$\overline{T}_{sys} = p_0 \overline{T}_s = 1/(\lambda + \mu) = \overline{T}_s \overline{T}_{st} / (\overline{T}_s + \overline{T}_{st})$$

Одноканальная телефонная линия. Заявка-вызов, поступившая в момент, когда линия занята, получает отказ. Простейший поток заявок поступает с интенсивностью λ=50 звонков/ч. Время обслуживания заявки есть случайная величина, которая подчиняется экспоненциальному закону распределения. Средняя продолжительность разговора $t_{обсл}$ = 3 мин. Определим показатели эффективности работы СМО.

4. Многоканальная СМО с отказами



Приведенная интенсивность входящего потока (измеряется в эрлангах)**:**

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$p_o = \frac{1}{(\sum_{i=0}^{n} \rho^i / i!)},$$

$$p_k = \frac{p_0 \rho^k}{k!}, k = 1, \ldots, n$$

Формулы Эрланга

Основные характеристики СМО

Отказ в обслуживании заявки

$$p_r = p_n = \frac{p_0 \rho^n}{n!}$$

Вероятность обслуживания заявки

$$p_s = 1 - p_r = 1 - p_n$$

Относительная пропускная способность

$Q = p_s$

Абсолютная пропускная способность

$A = \lambda Q = \lambda(1 - p_n)$

Среднее число занятых каналов

$$\bar{K} = \bar{N}_{sys} = \frac{A}{\mu} = \rho(1 - p_n) = \frac{\lambda(1 - p_n)}{\mu}$$

Среднее время пребывания заявки в СМО

$$\overline{T}_{sys} = \frac{\overline{N}_{sys}}{\lambda}$$

Пример: в отделении банка на обслуживании клиентов работают 3 оператора. Среднее время обслуживания одного клиента оператором – 12 минут. В среднем за час в банк обращаются 15 клиентов. Если все операторы заняты, клиенты банком не обслуживаются.

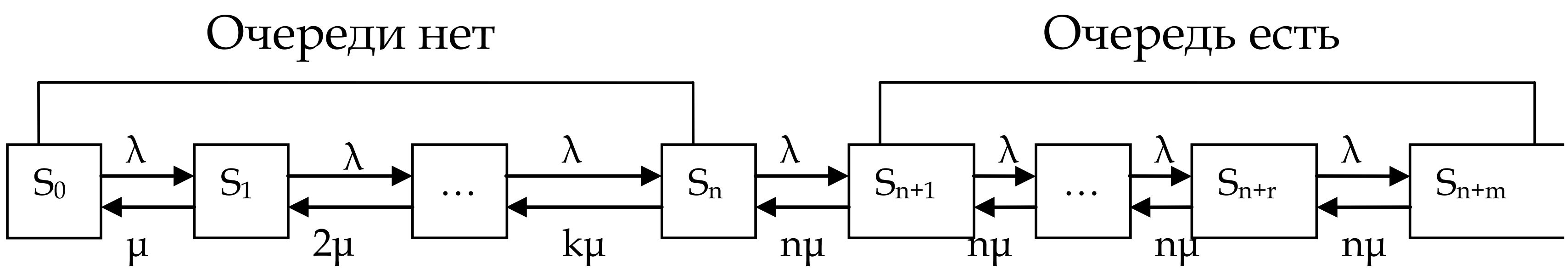
I. Найти основные средние характеристики работы отделения банка, а также вероятность того, что не менее двух операторов простаивают.

II. Рассчитать, как изменятся характеристики работы СМО, если операторы будут тратить на обслуживание клиентов 10 минут.

III. Определить минимальную среднюю производительность операторов, чтобы вероятность обслуживания клиентов банка была бы не ниже 0,9

5. Многоканальная СМО с ожиданием и ограничением на длину очереди

Граф состояний *n*-канальной СМО с ограничением на длину очереди *m*



Основные соотношения

Уравнения Колмогорова для многоканальной СМО с ожиданием и ограничением на длину очереди

$$
\begin{cases}
-\lambda p_0 + \mu p_1 = 0, \\
\dots \\
\lambda p_{k-1} - (\lambda + k\mu) p_k + (k+1) p_{k+1} = 0, \\
\dots \\
\lambda p_{n-1} - (\lambda + n\mu) p_n + n\mu p_{n+1} = 0, \\
\dots \\
\lambda p_{n+k-1} - (\lambda + n\mu) p_{n+k} + n\mu p_{n+k+1} = 0, k = 1, \dots, m-1, \\
\dots \\
\lambda p_{n+m-1} - n\mu p_{n+m} = 0.
\end{cases}
$$

Нормировочное условие:

$$\sum_{k=0}^{n+m} p_k = 1$$

Показатель нагрузки на один канал

$$\psi = \frac{\rho}{n} = \frac{\lambda}{n\mu}$$

Решение системы уравнений:

$$p_0 = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} \psi^k + \frac{n^n}{n!} \sum_{k=n+1}^{n+m} \psi^k \right)^{-1}$$

Упрощенная формула:

$$p_0 = \begin{cases} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} \psi^k + \frac{n^n}{n!} \frac{\psi^{n+1}(1-\psi^m)}{(1-\psi)} \right)^{-1}, \psi \neq 1; \\ \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} + \frac{n^n}{n!} m \right)^{-1}, \psi = 1. \end{cases}$$

Остальные предельные вероятности:

$$p_k = \begin{cases} (n^k / k!)\psi^k p_0, k = 1, 2, \dots, n; \\ (n^n / n!)\psi^k p_0, k = n+1, \dots, n+m \end{cases}$$

Основные характеристики СМО

Вероятность отказа:

$$p_r = p_{n+m} = \left(n^n / n!\right)\psi^{n+m} p_0$$

Вероятность приема заявки:

$$p_{sys} = Q = 1 - p_r = 1 - \left(n^n / n!\right)\psi^{n+m} p_0$$

Абсолютная пропускная способность:

$$A = \lambda Q = \lambda \left[1 - \left(n^n / n!\right)\psi^{n+m} p_0\right]$$

Среднее число занятых каналов

$$\bar{N}_s = \bar{K} = A/\mu = \rho Q = \rho\left[1-\left(n^n/n!\right)\psi^{n+m}p_0\right]$$

Среднее число заявок в очереди

$$\bar{N}_{line} = \begin{cases} \left(n^n/n!\right)\psi^{n+1}\dfrac{1-\psi^m(m+1-m\psi)}{(1-\psi)^2}p_0, \psi \neq 1; \\ \dfrac{n^n}{n!}\dfrac{m(m+1)}{2}p_{0,}\psi = 1. \end{cases}$$

Среднее число заявок, находящихся в системе

$$\bar{N}_{sys} = \bar{N}_{line} + \bar{N}_s$$

Среднее время обслуживания заявки

$$\bar{T}_s = \bar{N}_s / \lambda$$

Среднее время ожидания заявки в очереди

$$\bar{T}_{line} = \bar{N}_{line} / \lambda$$

Среднее время пребывания заявки в СМО

$$\bar{T}_{sys} = \bar{T}_s + \bar{T}_{line} = \left((\bar{N}_s + \bar{N}_{line}) / \lambda \right) = \bar{N}_{sys} / \lambda$$

Пример. В пункте валютного обмена работают два оператора, каждый из которых обслуживает клиента в среднем за 2,5 минуты. По условиям безопасности в помещении пункта может находиться одновременно не более 5 человек, включая обслуживаемых клиентов. Если помещение заполнено, то очередной клиент не становится в очередь, а уходит. В среднем клиенты приходят каждые 2 минуты. Найти основные характеристики работы обменного пункта.

6.Одноканальная СМО с ожиданием и ограниченной очередью.

n=1 ψ = ρ

$$p_0 = \begin{cases} \left(\sum_{k=0}^{m+1} \rho^k\right)^{-1} = \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}}, \rho \neq 1; \\ \left(\sum_{k=0}^{m+1} \rho^k\right)^{-1} = \dfrac{1}{m+2}, \rho = 1. \end{cases}$$

Вероятность отказа в обслуживании

$$p_r = p_{m+1} = \left(\rho^{m+1}\right) p_0$$

Вероятность принятия заявки

$$p_{sys} = 1 - p_r = 1 - \rho^{m+1} \cdot p_0$$

Предельные вероятности состояний:

$$p_{m+1} = \left(\rho^{m+1}\right) p_0$$

при $\rho = 1$ $p_0 = p_1 = p_2 = \dots p_m$

Относительная пропускная способность:

$$Q = 1 - p_r = 1 - p_{m+1} = 1 - \left(\rho^{m+1}\right) p_0$$

Абсолютная пропускная способность:

$$A = \lambda Q = \lambda \left[1 - p_r\right]$$

Среднее число заявок в очереди:

$$\bar{N}_{line} = 1 \cdot p_2 + 2 \cdot p_3 + \dots + m \cdot p_{m+1}$$

Среднее число заявок в очереди:

$$\bar{N}_{line} = \rho^2 \cdot \frac{1-\rho^m \cdot (m - m \cdot \rho + 1)}{(1-\rho)^2} \cdot p_0 \quad , \rho \neq 1$$

$$\bar{N}_{line} = \frac{m \cdot (m+1)}{2(m+2)} \quad , \rho = 1$$

Среднее время ожидания в очереди:

$$\bar{T}_{line} = \bar{N}_{line} / \lambda$$

Среднее время пребывания в системе:

$$\bar{T}_{sys} = \bar{T}_{line} + \mu$$

Автозаправочная станция имеет одну бензоколонку с площадкой, допускающей пребывание в очереди на заправку не более трех автомашин одновременно. Если в очереди находятся две автомашины, то очередная прибывшая автомашина проезжает мимо автозаправочной станции. Предполагается, что простейший поток автомашин поступает на станцию с интенсивностью 10 автомашин/ч. Время обслуживания заявки есть случайная величина, которая подчиняется экспоненциальному закону распределения с параметром 12 автомашин/ч. Определить параметры системы.

7. Многоканальная СМО с ожиданием и неограниченной очередью

Решение системы уравнений:

$$p_0 = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} \psi^k + \frac{n^n}{n!} * \frac{\psi^{n+1}}{1-\psi} \right)^{-1};$$

$$p_k = \begin{cases} (n^k / k!) * \psi^k p_0, k = 1, 2, ..., n; \\ (n^n / k!) * \psi^k p_0, k = n+1, n+2, ... \end{cases}$$

Нормировочное условие:

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$$

Вероятность отказа:

$$p_r = 0$$

Вероятность принятия заявки:

$$Q = p_{sys} = 1$$

Абсолютная пропускная способность:

$$A = \lambda$$

Среднее число занятых каналов:

$$\bar{N}_s = \bar{K} = A/\mu = \rho$$

Среднее число заявок в очереди:

$$\bar{N}_{line} = \left(n^n / n!\right) \cdot \frac{\psi^{n+1}}{(1-\psi)^2} p_0$$

Среднее время ожидания в очереди:

$$\bar{T}_{оч} = \frac{\bar{N}_{line}}{\lambda}$$

Среднее число заявок, находящихся в системе:

$$\bar{N}_{sys} = \bar{N}_{line} + \bar{N}_{s} = \bar{N}_{line} + \rho$$

Среднее время пребывания заявок в системе:

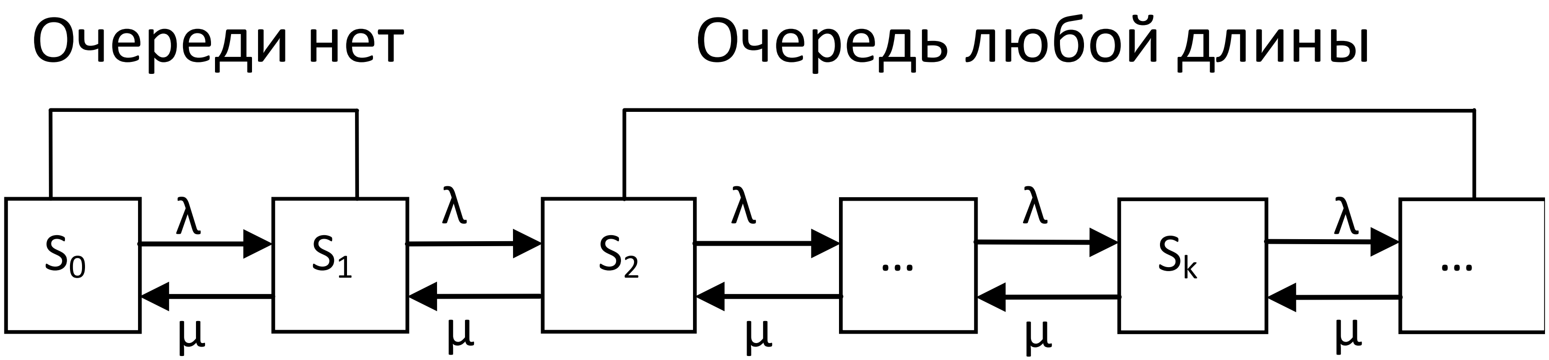
$$\bar{T}_{sys} = \frac{\bar{N}_{sys}}{\lambda}$$

Пример. В кассе метрополитена, продающей карточки на проезд, работают два окна. В среднем один кассир тратит на обслуживание одного пассажира 0,5 минуты. В среднем к кассе подходит 3 чел./мин.

Найти основные характеристики работы кассы.

8.Одноканальная СМО с ожиданием и неограниченной очередью

Граф состояний одноканальной СМО с неограниченной очередью



Приведенная интенсивность нагрузки СМО:
при $\lambda < \mu$

$$\rho = \lambda / \mu$$

Вероятность обслуживания: $p_{обс} = 1$

Вероятность отказа: $p_{отк} = 0$

Вероятность простоя системы: $p_0 = 1 - \rho$

Вероятность занятости системы: $p_1 = 1 - p_0$

Вероятность пребывания в очереди k заявок:

$$p_k = \rho^k (1 - \rho)$$

Относительная пропускная способность :

$$Q = p_{обс} = 1$$

Абсолютная пропускная способность:

$$A = \lambda * Q = \lambda$$

Среднее число обслуженных заявок:

$$L_{об} = \rho$$

Среднее число заявок в очереди:

$$L_{оч} = \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

Среднее число заявок в системе:

$$L_{СМО} = L_{оч} + L_{об}$$

Пример. В магазине работает только один продавец. Интенсивность обслуживания составляет 25 чел./час. Простейший поток покупателей поступает с интенсивностью 20 чел./час.

Найти основные характеристики работы СМО.

Разомкнутые СМО

Проанализируем работу склада готовых изделий завода железобетонных изделий методами теории массового обслуживания. Источниками заявок являются тележки с прицепами, подвозящие изделия на склад, и панелевозы, вывозящие эти изделия со склада. Каналами обслуживания являются краны. Если все краны заняты погрузочно-разгрузочными работами, тележки и панелевозы становятся в очередь и при освобождении кранов поступают на обслуживание в порядке очереди. Продолжительность обслуживания — случайная величина с показательным распределением и параметром μ (среднее число заявок, обслуживаемых одним каналом в единицу времени).

Проведя наблюдения за работой склада и статистическую обработку наблюдений, получим следующие параметры:

средние интенсивности потока панелевозов $\lambda_п$==5 ед/ч;

тележек $\lambda_т$= 0,3 ед/ч (в каждом из 5 пролетов);

среднюю производительность каждого крана при обслуживании панелевозов $\mu_п$= 4 ед/ч, тележек $\mu_т$= 2 ед/ч;

количество работающих кранов n=5 (по одному в каждом пролете);

среднее число изделий, нагружаемых на панелевоз, $b_п$= 6, на тележку $b_т$= 20.

Используя методы СМО, сравним два варианта организации работы склада: 1) с равномерным закреплением панелевозов и тележек за кранами, 2) без закрепления за кранами.

Определить оптимальное число автомобилей-самосвалов, которые нужно прикрепить к экскаватору производительностью *35* м^3/ч. Объем гравийного материала, перевозимого автомобилем-самосвалом за один рейс *2,5* м^3. Стоимость простоя экскаватора составляет *19,4* у.е./час, а самосвала – *15,6* у.е./час. Время движения автомобиля-самосвала с грузом и обратно без груза составляет суммарно *1* ч. Сравнить оптимальное число автомобилей-самосвалов $n_{опт}$ и расчетное значение числа автомобилей-самосвалов n, определите потери от простоя в обоих случаях, приходящихся на 1 м^3 вывозимого материала. сравнить производительность автомобиля-самосвала при прикреплении к экскаватору $n_{опт}$ и n автомобилей.

Рассчитать оптимальный состав заготовительно-транспортного подразделения, если производительность экскаватора *50* м^3/ч, время рейса автомобиля-самосвала с объемом *5* м^3 0,3ч при котором суммарные потери от простоев техники будут наименьшими. Стоимость простоя экскаватора составляет *450* у.е./час, а самосвала - *150* у.е./час.

Замкнутые СМО

Задана система "экскаватор - самосвалы". Экскаватор погружает за один рабочий цикл **1** т грунта. Грузоподъемность самосвала равна **7** т. Число самосвалов, обслуживающих экскаватор, равно **5**. Рабочий цикл экскаватора длится **0.295** мин, а время обращения самосвала равно **10** мин. Проанализировать поведение данной системы массового обслуживания за первые полчаса ее функционирования. Определить промежуток времени, в течение которого система переходит в стационарный режим. Определить продуктивность экскаватора, а также среднее число простаивающих машин. Рассчитать оптимальный состав заготовительно-транспортного подразделения, при котором суммарные потери от простоев техники будут наименьшими. Стоимость простоя экскаватора составляет *m* у.е./час, а самосвала - *n* у.е./час.