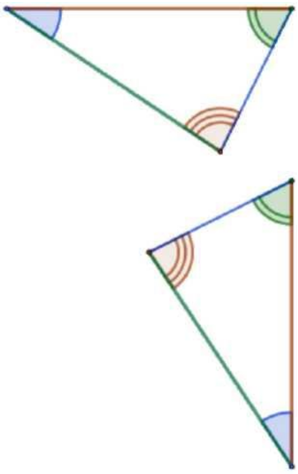
Треугольники.



Треугольник.

Треугольник - это геометрическая фигура, состоящая из трех точек, не лежащих на одной прямой и трех отрезков попарно их соединяющих. Точки - вершины треугольника; отрезки - стороны треугольника.

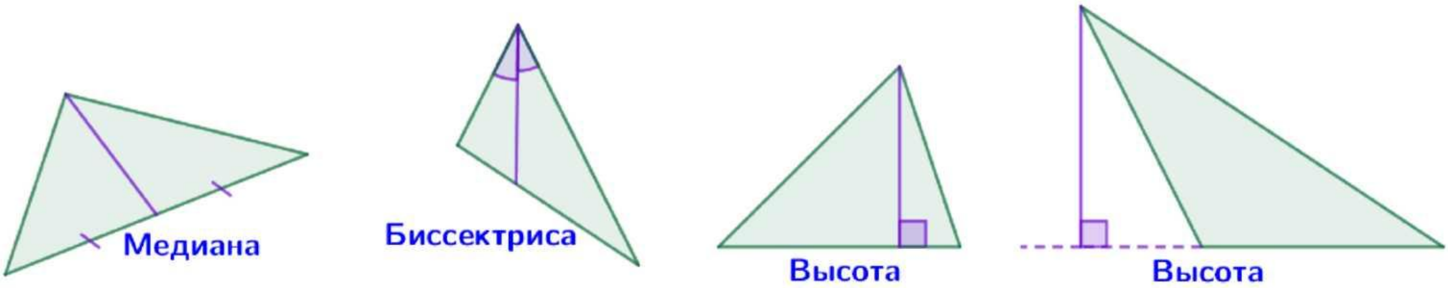
Периметр треугольника - сумма длин всех сторон.

Два треугольника называются равными, если они совмещаются наложением.

Если два треугольника равны, то элементы (стороны и углы) одного треугольника соответственно равны элементам другого треугольника. В равных треугольниках против соответственно равных сторон лежат равные углы.

Медианы, биссектрисы и высоты треугольника

Из точки, не лежащей на прямой, можно провести перпендикуляр к этой прямой, и притом только один.



Отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны, называется **медианой** треугольника.

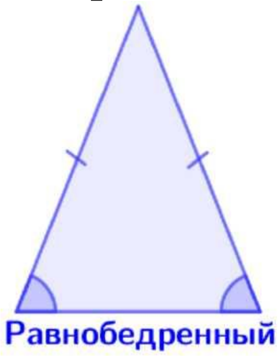
Отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину треугольника с точкой противоположной стороны, называется **биссектрисой** треугольника.

Перпендикуляр, проведенный из вершины треугольника к прямой, содержащей противоположную сторону, называется **высотой** треугольника

В любом треугольнике медианы пересекаются в одной точке, биссектрисы пересекаются в одной точке; высоты (или их продолжения) также пересекаются в одной точке.

Равнобедренный треугольник

Треугольник называется **равнобедренным,** если две его стороны равны.



Признаки равнобедренного треугольника

1) Если в треугольнике два угла равны, то этот треугольник равнобедренный;

2) Если медиана или биссектриса треугольника является его высотой, то этот треугольник равнобедренный; 4) Если медиана треугольника является его биссектрисой, то этот треугольник равнобедренной.

Свойства равнобедренного треугольника

1) в равнобедренном треугольнике углы при основании равны;

2) в равнобедренном треугольнике биссектриса треугольника, проведенная к основанию, является медианой и высотой.

Треугольник, все стороны которого равны, называется **равносторонним.**

Свойства равностороннего треугольника

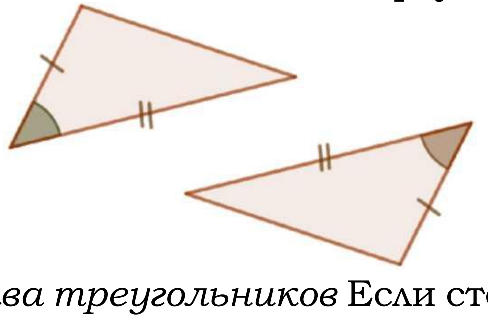
1) в треугольнике против равных сторон лежат равные углы;

2) в равностороннем треугольнике все углы равны;

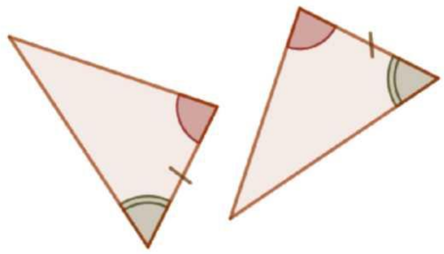
3) в равностороннем треугольнике биссектриса, высота и медиана, проведенные из одной вершины, совпадают.

Признаки равенства треугольников

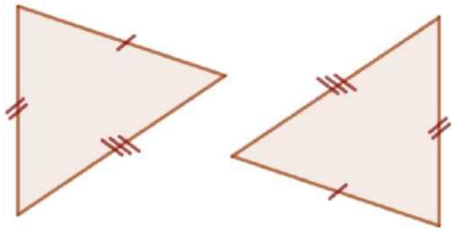
Первый признак равенства треугольников Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.



Второй признак равенства треугольников Если сторона и два прилежащие к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.



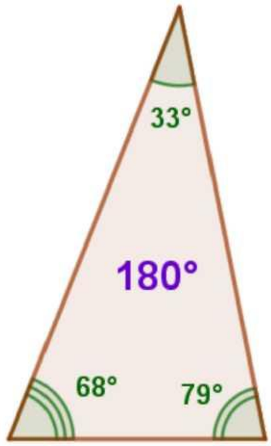
Третий признак равенства треугольников Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.



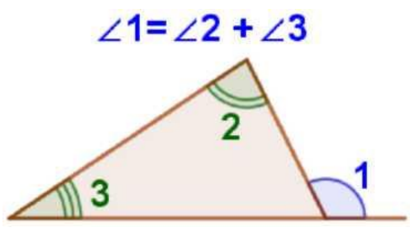
Соотношения между сторонами и углами треугольника.

Теорема о сумме углов треугольника

Сумма углов треугольника равна 180°.



Внешним углом треугольника называют угол, смежный с углом этого треугольника.



Внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним.

Соотношения между сторонами и углами треугольника

В треугольнике против большей стороны лежит больший угол и, наоборот, против большего угла лежит большая сторона.

В прямоугольном треугольнике гипотенуза больше катета.

Если два угла треугольника равны, то треугольник равнобедренный.

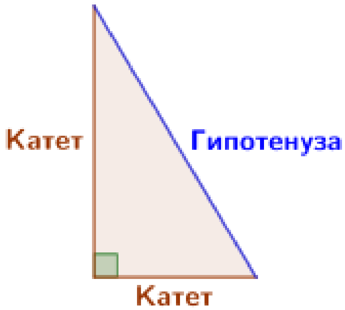
Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других его сторон.

Для любых трех точек A, B и C, не лежащих на одной прямой, справедливы неравенства: $AB<AC+CB$, $AC<AB + BC$, $BC<BA+AC$.

Виды треугольников:
Остроугольный (все углы острые),
тупоугольный (один угол тупой и два острых),
прямоугольный (один угол прямой и два острых)

Прямоугольные треугольники

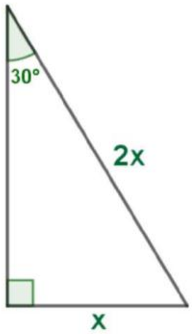
Сторону прямоугольного треугольника, противолежащую прямому углу, называют гипотенузой, а стороны, прилежащие к прямому углу, - катетами.



Свойства прямоугольного треугольника

1) Сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90°.

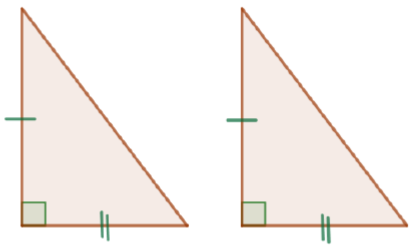
2) Катет, лежащий против угла, величина которого равна 30°, равен половине гипотенузы.



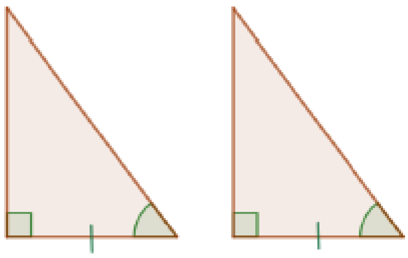
3) Если катет равен половине гипотенузы, то угол, лежащий против этого катета, равен 30°.

Признаки равенства прямоугольных треугольников

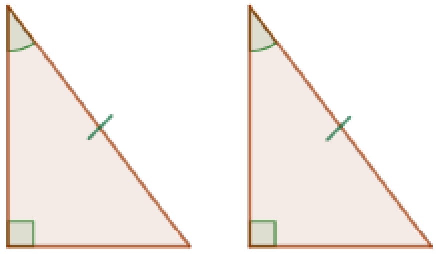
1) Если катеты одного прямоугольного треугольника соответственно равны катетам другого, то такие треугольники равны.



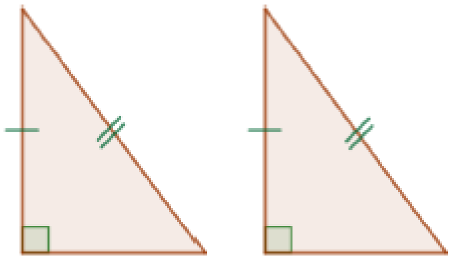
2) Если катет и прилежащий к нему острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и прилежащему к нему острому углу другого, то такие треугольники равны.



3) Если гипотенуза и острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и острому углу другого, то такие треугольники равны.



4) Если гипотенуза и катет одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и катету другого, то такие треугольники равны



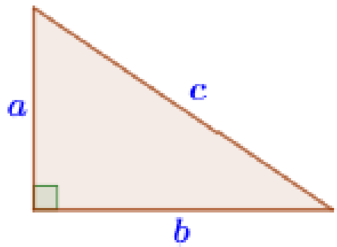
Теорема Пифагора.

В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

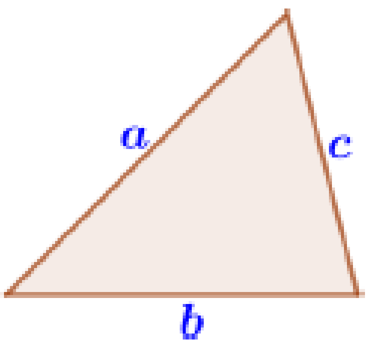
$c^2 = a^2+b^2$

Теорема, обратная теореме Пифагора

Если квадрат одной стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон, то треугольник прямоугольный.

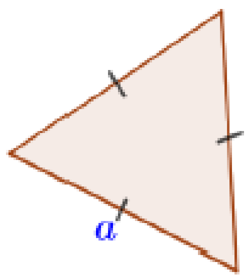


3, 4, 5 или 5, 12, 13
или 8, 15, 17 и т.д.



Формула Герона

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$



Площадь равностороннего треугольника

$$S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

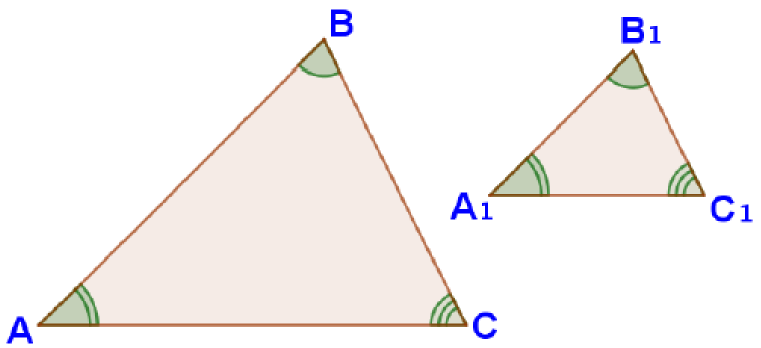
Подобные треугольники.

Отношением отрезков AB и CD называется отношение их длин, т. е. $\frac{AB}{CD}$

Отрезки AB и CD *пропорциональны* отрезкам A1B1 и C1D1, если

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CD}{C_1D_1}$$

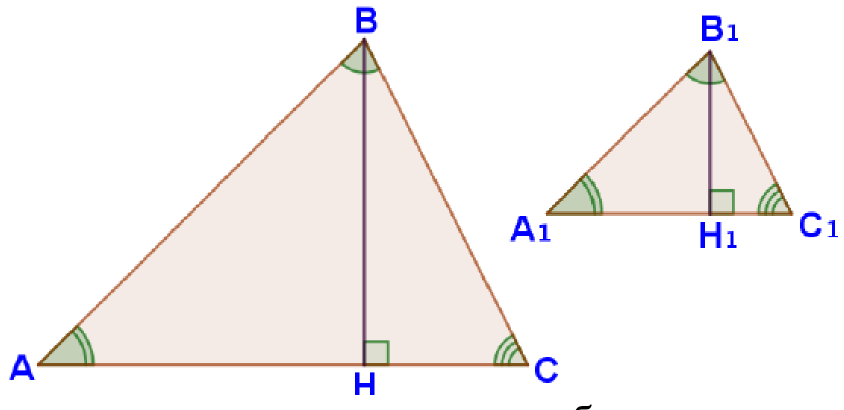
Два треугольника называются *подобными,* если их углы соответственно равны и стороны одного треугольника пропорциональны сходственным сторонам другого.



$$\angle A = \angle A_1, \quad \angle B = \angle B_1, \quad \angle C = \angle C_1,$$

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1} = k$$

Число **k,** равное отношению сходственных сторон подобных треугольников, называется *коэффициентом подобия.*



Отношение сходственных сторон подобных треугольников равно отношению высот, проведенных к этим сторонам

$$\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BH}{B_1H_1} = k$$

Отношение площадей двух подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия

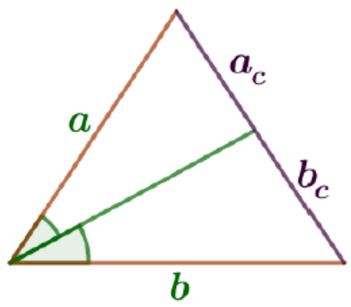
$$\frac{S}{S_1} = k^2.$$

Отношение периметров двух подобных треугольников равно коэффициенту подобия

$$\frac{P}{P_1} = k.$$

Биссектриса треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника

$$\frac{a}{b} = \frac{a_c}{b_c}$$

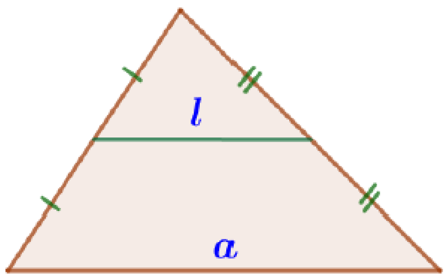


Признаки подобия треугольников

1. Если **два угла** одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то такие треугольники подобны.
2. Если **две стороны** одного треугольника **пропорциональны двум сторонам** другого треугольника и углы, заключенные между этими сторонами, равны, то такие треугольники подобны.
3. Если **три стороны** одного треугольника **пропорциональны трем сторонам** другого, то такие треугольники подобны.

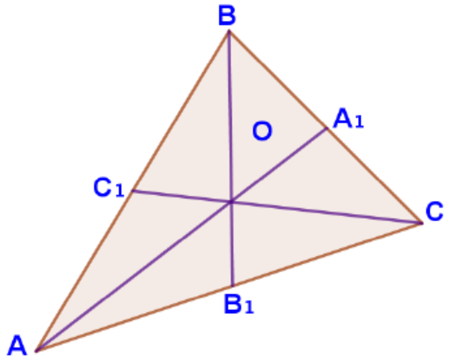
Два равносторонних треугольника подобны.

Средней линией треугольника называется отрезок, соединяющий середины двух его сторон. Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон $l \parallel a$ и равна половине этой стороны l=1/2a.



Медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении 2:1, считая от вершины

$$\frac{AO}{A_1O}=\frac{BO}{B_1O}=\frac{CO}{C_1O}=\frac{2}{1}$$



Отрезок XY называется средним пропорциональным (средним геометрическим) для отрезков AB и CD, если

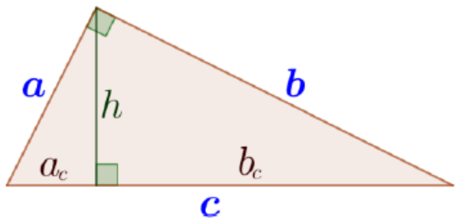
$$XY=\sqrt{AB\cdot CD}$$

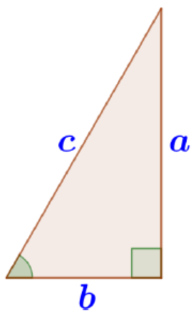
Высота прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, есть среднее пропорциональное для отрезков, на которые делится гипотенуза этой высотой

$$h=\sqrt{a_c\cdot b_c}.$$

Катет прямоугольного треугольника есть среднее пропорциональное для гипотенузы и отрезка гипотенузы, заключенного между катетом и высотой, проведенной из вершины прямого угла

$$a=\sqrt{c\cdot a_c};\quad b=\sqrt{c\cdot b_c}.$$





Синусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение **противолежащего катета к гипотенузе**

$$\sin\alpha=\frac{b}{c}.$$

Косинусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение **прилежащего катета к гипотенузе**

$$\cos\alpha = \frac{a}{c}$$

Тангенсом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение **противолежащего катета к прилежащему катету**

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{b}{a}$$

Основное тригонометрическое тождество: $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$

α	$30°$	$45°$	$60°$
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\mathrm{tg}\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Если острый угол одного прямоугольного треугольника равен острому углу другого прямоугольного треугольника, то синусы этих углов равны, косинусы этих углов равны и тангенсы этих углов равны.