Математические предложения

План

I. Высказывания и высказывательные формы.

1. Значение истинности высказываний и высказывательных форм.
2. Простые и составные высказывания и высказывательные формы.
3. Логическая структура составного предложения.

II.Конъюнкция и дизъюнкция высказываний

1. Таблица истинности высказываний.
2. Конъюнкция и дизъюнкция высказывательных форм.

III.Высказывания с кванторами.

1. Квантор общности и значение истинности.
2. Квантор существования и значение истинности.

IV.Отрицание высказываний и высказывательных форм.

V.Отношения следования и равносильности.

VI.Структура и виды теорем.

1. Теорема, правила, формулы
2. Виды теорем.
3. Закон контрпозиции

VII.Основные выводы

Рассмотрим некоторые предложения

1. «$1 + 9 = 20 - 10$. Это равенство»
2. $37 + 6 > 37$
3. $20 + 8 < 20$
4. «некоторые числа делятся на 5»
5. $5 + x = 9$

Определим истинны ли они или ложные

Предложения 1,2,4 – истинные

Предложение 3 – ложное

высказывания

Предложение 5 – нельзя указать истинное оно или ложное

Высказывательная форма

Высказывание – предложение, относительно которого имеет смысл вопрос: истинно оно или ложно.

Высказывательная форма – предложение с одной или несколькими переменными, которое обращается в высказывание при подстановке в него значений переменной.

Высказывательная форма

а + в = с

одноместная в.ф.

а+ 3 =5

двухместная в.ф.

а + в = 5

Обозначения: А – «И» - высказывание А – истинно

В – «Л» - высказывание В – ложно

«И», «Л» - *значения истинности высказывания*

***Множество истинности* высказывательной формы – это значения переменной, которые обращают высказывательную форму в истинное высказывание.**

***Пример:* определить множество истинности высказывательной формы $x < 6$, если а) $x \in N$ б) $x \in Z$ в) $x \in R$**

a) **Множество истинности – {1,2,3,4,5}**

b) **Множество истинности – {0,1,2,3,4,5}**

c) **Множество истинности – {- ∞; 6}**

Выше рассмотренные предложения – простые или элементарные предложения.

Из двух простых предложений можно составить новые предложения с помощью союзов «и», «или»…

Логическая связка – «и», «или», «если,…то», «не», «тогда и только тогда, когда».

Составные предложения – это предложения, образованные из элементарных с помощью логических связок.

Для определения логической структуры составного предложения *необходимо установить*:

1. **Из каких элементарных предложений оно образовано;**
2. **С помощью, каких логических связок оно образовано.**

***Пример*: 1) $x \geq 7$ – это составная высказывательная форма.**

Логическая структура: «A или B»

Элементарные высказывательные формы – A – «$x > 7$»

B - «$x = 7$»

Логическая связка – «или»

2) «если треугольник равнобедренный, то углы при основании в нем равны» - это составное высказывание.

Логическая структура: «Если А, то В»

Элементарные предложения:

А – «треугольник равнобедренный»

В – «углы при основании равны»

Логические связки: «Если ……, то».

«Число 25 четное и делится на 5»

Логическая структура – «А и В»

Элементарные высказывательные формы –

А – «25 – четное число»

В – «25 – делится на 5»

Логическая связка – « и »

Определение. **Конъюнкцией** высказываний А и В называется высказывание $A \wedge B$, которое истинно, когда оба высказывания истинны, и ложно, когда хотя бы одно из высказываний ложно.

***Пример*:** А – «Л» $\Rightarrow$ $A \wedge B$ – «Л» (по определению)

В – «И»

Определение. **<u>Дизъюнкцией</u>** **высказываний А и В называется высказывание $A \vee B$, которое истинно, когда истинно хотя бы одно из высказываний, и ложно, когда оба высказывания ложны.**

Пример: **«Число 25 делится на 5 или на 3».**

А – «25 делится на 5»

В – «25 делится на 3»

<u>Логическая связка</u> – или

<u>Логическая структура</u> - $A \vee B$

А – «И» $\Rightarrow$ – $A \vee B$ «И» (по определению)

В – «Л»

Составим таблицу истинности конъюнкции и дизъюнкции

А	В	$А \wedge В$	$А \vee В$
И	И	И	И
И	Л	Л	И
Л	И	Л	И
Л	Л	Л	Л

Конъюнкцию одноместных высказывательных форм обозначают:

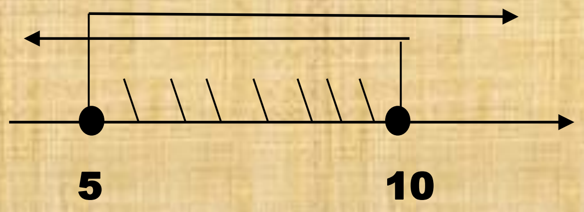
$$A(x) \wedge B(x)$$

Высказывательная форма $A(x) \wedge B(x)$ обращается в истинное высказывание, если обращаются в истинное высказывание обе высказывательные формы $A(x)$ и $B(x)$ при значениях x из области определения X.

Пример: $\begin{cases} x + 3 < 13 \\ 3x > 15 \end{cases}$ $A(x)$ – $x+3<13$, $B(x)$ – $3x > 15$

Логическая структура $A(x) \wedge B(x)$

$$\begin{cases} x < 10 \\ x > 5 \end{cases}$$



Ответ: $A(x) \wedge B(x)$ – «И» при $x \in (5;10)$.

Дизъюнкцию одноместных высказывательных форм обозначают:

$$A(x) \vee B(x)$$

Высказывательная форма $A(x) \vee B(x)$ обращается в истинное высказывание, при тех значениях x из области определения X, при которых обращается в истинное высказывание хотя бы одна из высказывательных форм.

Пример: **(x + 7) (x - 4) = 0**

Произведение равно нулю, когда один из множителей равен нулю.

A(x) – x + 7=0

B(x) – x – 4 =0

Логическая структура: $A(x) \vee B(x)$

x +7=0 или x – 4 =0

x = - 7 x=4

Ответ. $A(x) \vee B(x)$ **- И при** $x \in (-7;4)$.

Квантор существования – это выражения «существует», «некоторые», «найдется», «есть», «хотя бы один».

Обозначение: $\exists$ x – «существует x»

($\exists$ x) Ax – «существует такое значение x, что A(x) – истинное высказывание».

Истинность высказывания с квантором существования устанавливается при помощи **конкретного примера**, а ложность - **доказывается.**

Пример: «Некоторые прямоугольные треугольники являются равносторонними».

Высказывание содержит квантор существования – «некоторые» и оно – «Л». Это необходимо доказать.

В равностороннем треугольнике все углы по 60°, а в прямоугольном один из углов - 90°. Следовательно, ни один прямоугольный треугольник не может быть равносторонним.

Квантор общности – это выражения «всякий», «любой», «каждый» и «все».

Обозначение: $\forall x$ – для всякого x.

($\forall x$) A(x) – «для всякого x предложения A(x) – истинное высказывание».

Истинность высказывания с квантором общности устанавливается путем **доказательства,** а ложность – **контрпример.**

Пример: «Всякое натуральное число делится на 2 » высказывание содержит квантор общности – «всякое и оно – Л, т.к. «3 не делится на 2» - контрпример.

В математике часто приходится строить предложения в которых что – либо отрицается.

Пример: **«15 – простое число» А – Л**

Построим отрицание высказывания: «неверно, что 15 простое число» - И

Обозначение: $\bar{A}$

Читают: «Не А» или «Неверно, что А».

Определение. **Отрицанием высказывания А называется высказывание Ā, которое ложно, если высказывание А истинно, и истинно, если высказывание А- ложно.**

А	Ā
И	Л
Л	И

Отрицании конъюнкции и дизъюнкции

Законы де Моргана

$$\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B} \qquad \overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B}$$

Чтобы построить отрицание конъюнкции (дизъюнкции), достаточно заменить отрицаниями составляющие её высказывания, а союз «и» («или») заменить союзом «или» («и»).

Пример: **«Число 15 – нечетное и делится на 5».**

Построить отрицание высказывания.

Решение

А $\wedge$ В – И

I.способ. А $\wedge$ В - «Неверно, что 15 – нечетное число и делится на 5». А $\wedge$ В – Л $\Rightarrow$ оно является отрицанием высказывания А.

II.способ. Воспользуемся законом де Моргана

$$\overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B}$$

«Число 15 – четное или не делится на 5» - Л

Отрицание высказываний с кванторами

Отрицание высказывания с квантором можно построить двумя способами:

- **перед высказыванием ставится слова «неверно что»;**
- **квантор общности (существования) заменяется квантором существования (общности), а предложение, стоящее после квантора заменяется его отрицанием.**

Пример: **Построить отрицание высказываний**

а) А–«Всякий многоугольник является четырехугольником» - Л – высказывание <u>с квантором общности.</u>

I. способ. Ā – «Неверно, что всякий многоугольник является четырехугольником» - И

А – Л $\Rightarrow$ Ā построено верно

Ā – И

II. способ. Ā - «Некоторые многоугольники не являются четырехугольниками» - И

А – Л $\Rightarrow$ Ā построено верно

Ā – И

b) А – «Некоторые свойства квадрата присущие прямоугольнику» - И – высказывание с квантором существования.

I. способ. Ā - «Неверно, что некоторые свойства квадрата присущи прямоугольнику».

А – И $\Rightarrow$ Ā построен верно

Ā – Л

II. способ. Ā - «Всякое свойство квадрата не присуще прямоугольнику» - Л

А – И

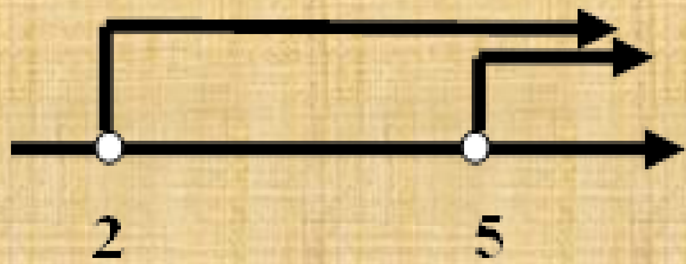
Ā– Л

Отношения следования и равносильности

Рассмотрим высказывательные формы:

А(х) – «х >5»

В (х) – «х >2»



Как связаны между собой?

Можно утверждать:

- «Все числа больше пяти больше двух» или
- «из того, что х >5 следует, что х >2 ».

Определение. Высказывательная форма В (х) следует из высказывательной формы А (х), если В (х) обращается в истинное высказывание при всех тех значениях х, при которых А (х) истинна.

Обозначение: $A(x) \Rightarrow B(x)$

Читают:

- Из А(х) следует В;
- Всякое А(х) есть В(х);
- Если А (х), то В(х);
- В(х)есть следствие А(х);
- А(х) – достаточное условие для В (х)
- В(х) – необходимое условие для А(х)
- Как установить истинность предложения $A(x) \Rightarrow B(x)$?

Его можно сформулировать в виде:

«Всякое А(х) есть В(х)»

Имеет место высказывание с квантором общности, значит истинность устанавливается путем доказательства, а ложность – контрпример.

Рассмотрим высказывания:

A(x) – «треугольник равнобедренный»

B(x) – «Углы при основании треугольника равны »

A(x) $\Rightarrow$B (x) – И

«Если в треугольнике углы при основании равны, то он равнобедренный» - И

Говорят: предложения A(x) и B(x) – равносильны.

Определение. Предложения A(x) и B(x) равносильны, если из предложения A(x) следует предложения B(x), а из предложения B(x) следует предложение A(x).

Обозначение: $A(x) \Leftrightarrow B(x)$

Читают:

- A(x) равносильно B(x)
- A(x) тогда и только тогда, когда B(x)
- A(x) – необходимое и достаточное условие B(x)
- B(x) – необходимое и достаточное условие A(x)

Теорема – это высказывание, истинность которого устанавливается путем доказательства.

Логическая структура теоремы:

A⇒B, где A и B – высказывательные формы с одной или несколькими переменными.

Предложение A – <u>условие теоремы</u>;

B – <u>заключение.</u>

Теорема. **Если a – любое число и n, k – натуральные числа, то справедливо равенство**

$$a^n * a^k = a^{n+k}$$

Для удобства использования теоремой её формулируют в виде правила.

Правило. При умножении степеней с одинаковыми основаниями, основания оставляют прежним. А показатели степеней складывают.

$$\mathrm{a}^{n} * a^{k} = a^{n+k}$$

Пусть дана теорема:

Теорема	**A⇒B**	**«Если четырехугольник является ромбом, то его диагонали взаимно перпендикулярны» - И**
Обратная теорема	**B⇒A**	**«Если в четырехугольнике диагонали взаимно перпендикулярны, то он является ромбом». - И**
Противоположная теорема	$\overline{A} \Rightarrow \overline{B}$	**«Если четырехугольник не является ромбом, то его диагонали не перпендикулярны».**
Обратная противоположной теорема	$\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$	**«Если в четырехугольнике диагонали не перпендикулярны, то четырехугольник не является ромбом».**

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\overline{B} \Rightarrow \overline{A})$$

$$(B \Rightarrow A) \Leftrightarrow (\overline{A} \Rightarrow \overline{B})$$

Закон контрапозиции

всегда когда истинна прямая теорема, будет истинна и теорема обратная противоположной.

всегда когда истинна обратная теорема, будет истинна и теорема противоположная.

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте разницу между высказыванием и высказывательной формой.
2. Как определить логическую структуру составного предложения?
3. Сформулируйте различие между конъюнкцией и дизъюнкцией.
4. Как определяется истинность конъюнкции и дизъюнкции высказываний и высказывательных форм?
5. Сформулируйте правила определения истинности высказываний с кванторами.
6. Где используется закон де Моргана?
7. Каким образом можно построить отрицание высказываний с кванторами?
8. В каких случаях используют отношение логического следования и равносильности между предложениями?
9. В чем отличие теоремы от правила?
10. Какова логическая структура различных видов теорем?
11. Каким законом связаны различные виды теорем?