Критерии принятия решений

Цель работы – изучение особенностей применения критериев принятия решений.

Основные сведения

Критерий принятия решений − это функция, выражающая предпочтения лица принимающего решения (ЛПР) и определяющая правило, по которому выбирается приемлемый или оптимальный вариант решения.

Задача принятия решений возникает тогда, когда возникает несколько конкурирующих вариантов решения. В противном случае ситуация предопределена. Варианты решений возникают в результате анализа проблемной ситуации, представленной в виде описательной модели. В классическом случае описание ситуации дается в виде матрицы, строки которой соответствуют вариантам решений, а столбцы − факторам, которые могут повлиять на результат, получаемый ЛПР. На пересечении столбцов и строк расположены либо проигрыши, соответствующие реализациям решений E_i в соответствующих условиях F_j, либо, наоборот, выигрыши.

Рассмотрим простейший случай одностолбцовой матрицы.

Предположим, что у нас имеются варианты решений E_1, E_2,..., E_n, которые характеризуются некоторым результатом e_i.

Такой результат можно интерпретировать как выигрыш, полезность, надежность. Нам необходимо найти $\max\limits_i(e_i)$.

Таким образом, выбор оптимального варианта производится с помощью критерия

$$E_o = \left\{ E_i \middle| E_i \in E \;\&\; e_i = \max_i(e_i) \right\}. \tag{1}$$

Это правило выбора читается следующим образом: множество E_o оптимальных вариантов состоит из тех вариантов E_i, которые принадлежат множеству E всех вариантов и оценка e_i которых максимальна среди всех оценок $\{e_i\}$. (Логический знак & читается как "и" и требует, чтобы оба связываемых им утверждения были истинны.)

Такая постановка задачи, как было сказано выше, соответствует простому случаю.

В более сложных структурах каждому допустимому варианту решения E_i по многим причинам могут соответствовать различные внешние условия (состояния) F_j и, как следствие, различные результаты e_{ij} реализации решений.

Под результатом решения e_{ij} здесь будем понимать численную оценку, соответствующую варианту E_i и условиям F_j и характеризующую экономический эффект (прибыль), полезность или потребительную стоимость. Будем называть такой результат эффективностью решения.

Таким образом, ситуация ПР описывается некоторой матрицей (табл. 1). Размерность этой матрицы зависит от множества вариантов решений и множества рассматриваемых факторов или условий, влияющих на принятие решений.

Таблица 1

Матрица решений $|e_{ij}|$

	F_1	F_2	…	F_m
E_1	e_{11}	e_{12}	...	e_{1m}
E_2	e_{21}	e_{22}	...	e_{2m}
…	...	...	...	...
E_n	e_{n1}	e_{n2}	...	e_{nm}

В данном случае, так же как и в простейшем, описанном выше, ЛПР старается выбрать решение с наилучшим результатом. Однако, поскольку ему неизвестно, с какими условиями он столкнется, он вынужден принимать во внимание все численные оценки e_{ij}, соответствующие варианту E_i. Первоначальная задача максимизации $\max\limits_i(e_i)$ согласно критерию (1) должна быть теперь заменена другой, подходящим образом учитывающей все последствия любого из вариантов решения E_i.

Для того, чтобы получить более ясную и наглядную интерпретацию перейдем к графическому представлению оценочных функций. Случай с двумя внешними условиями (m=2) при n вариантах решений будет простейшим. Результат такого рассмотрения можно распространить на случай большего количества внешних факторов (условий).

Введем прямоугольную систему координат, откладывая по оси абсцисс значения результата e_{i1} решения E_i, соответствующего внешнему состоянию F_1, а по оси ординат − значения e_{i2}, соответствующего состоянию F_2, i=1,...,n. При таких обозначениях каждый вариант решения E_i соответствует точке на плоскости с координатами (e_{i1},e_{i2}), i=1,..,n соответственно. Все точки образуют множество, которое можно вписать в прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат, расположение которых соответствует максимальным и минимальным значениям среди всех элементов матрицы. Точку с координатами ($max(e_{i1},i)$, $max(e_{i2},i)$), соответствующей верхнему правому углу, мы назовем *утопической точкой* (УТ). Смысл этого названия в том, что координаты всех точек (e_{i1},e_{i2}), i=1,..,n, соответствующих вариантам решений E_1,..., E_n, не могут быть больше, чем у утопической точки.

Аналогичное значение имеет и так называемая антиутопическая точка (АУТ), имеющая координаты ($minx(e_{i1},i)$, $min(e_{i2},i)$), соответствующая нижнему левому углу. Координаты всех точек (e_{i1},e_{i2}), i=1,..,n, соответствующих вариантам решений E_1,..., E_n, не могут быть меньше, чем у точки АУТ. Построенный прямоугольник называется *полем полезности решений* (рис. 1).

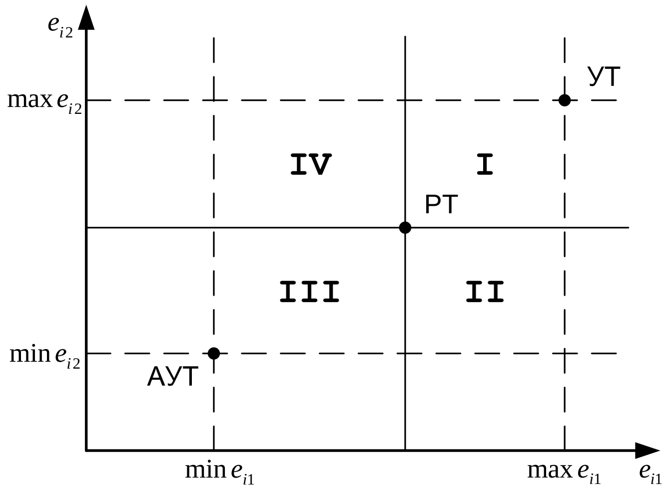

Рис. 1. Поле полезности решений

Рассмотрим это поле подробнее. Выберем произвольную точку на плоскости и назовем ее рабочей точкой (РТ) − $E_{рт}$. Обозначим ее координаты ($e_{рт1}$,$e_{рт2}$). С помощью прямых, параллельных координатным осям, разобьем плоскость на четыре части и обозначим их I, II, III и IV. В рассматриваемом нами двумерном случае каждая из этих частей имеет вид квадранта; в случае произвольной размерности они превращаются в так называемые *конусы*.

Все точки E_i из матрицы вариантов решений, лежащие в конусе I заведомо или гарантировано лучше, чем рассматриваемая точка РТ. Это преимущество решений из конуса I по отношению к решению, находящемуся в РТ не зависит от того, какой фактор − F_1 или F_2 реализуется, то есть не важно по какой координате это преимущество реализуется. Поэтому мы называем конус I *конусом предпочтения*.

Соответственно все точки конуса III хуже точки РТ ($e_{рт1}$>=e_{i1} и $e_{рт2}$>=e_{i2}), и мы будем называть область III *антиконусом*. Таким образом, оценка качества точек из этих двух конусов в сравнении с точкой РТ проста и однозначна.

Оценка же точек в отмеченных штриховкой конусах II и IV является неопределенной, так как соотношения их координат с РТ является противоречивым. Вследствие этого их называют *областями неопределенности* и варианты решений в этих конусах связаны с допущением некоторого риска принятия решений.

Таким образом, критериальные функции, лежащие внутри конуса I обеспечивают гарантированный результат и могут считаться безрисковыми (пессимистическими) критериями ПР. Линии, проходящие через II и IV квадранты, соответствуют критериям с риском.

И, наконец, линии, лежащие внутри III конуса соответствуют критерию азартного игрока или оптимистичной позиции. Рассмотрим линии, соответствующие трем группам критериев (рис. 2).

Все точки из областей неопределенности, лежащие справа и выше каждой линии функций предпочтения лучше точек, лежащих слева и ниже. Всякая функция (линия) предпочтения объединяет все точки, соответствующие одному и тому же значению критерия (точки равной эффективности); справа и выше ее располагаются все лучшие точки, то есть точки более эффективных решений, а слева и ниже − худшие, то есть точки менее эффективных решений.

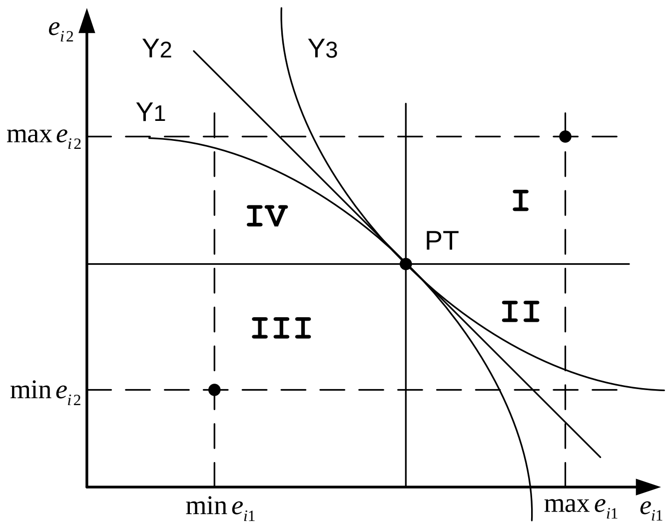

Рис. 2. Функции предпочтения при принятии решений
Y_1 – азартного игрока (оптимистические);
Y_2 – критериев с риском (нейтральные);
Y_3 – безрисковые (пессимистические).

Таким образом, критериальная функция делит плоскость на две части. В соответствии с рассмотренным полем полезности, критериальные функции, проходящие ближе к границам I квадранта соответствуют безрисковой политике принятия решения или тенденции избегания риска, как например, вогнутая штриховая линия на рисунке 2. Линии, проходящие через квадрант III, соответствуют азартной стратегии с максимальным риском. Соответственно, прямая линия, проходящая через рабочую точку и квадранты II и IV, соответствует нейтральной или объективной стратегии в ПР.

Если выбор оценочной функции отдается на усмотрение ЛПР, то приходится считаться с возможностью различных результатов для одного и того же решения. Таким образом, принятие решения не есть чисто рациональный процесс. Опасность возникает в тех случаях, когда критериальные оценочные функции выбираются интуитивно, иногда даже без выяснения исходной позиции лица принимающего решения.

Всякое техническое или экономическое решение в условиях неполной информации − сознательно или неосознанно − принимается в соответствии с какой-либо оценочной функцией описанного выше типа. Как только это бывает признано явно, следствия соответствующих решений становятся лучше обозримыми, что позволяет улучшить их качество. При этом выбор оценочных функций всегда должен осуществляться с учетом количественных характеристик ситуации, в которой принимаются решения.

Следующие критерии относят к классическим:

– минимаксный $Z_{MM} = \max_i \left(\min_j \left(e_{ij} \right) \right)$;

– Байеса-Лапласа $Z_{BL} = \max_i \left(\sum_{j=1}^{m} e_{ij} q_j \right)$;

– Сэвиджа $Z_S = \min_i \left(\max_j \left(\max_i \left(e_{ij} \right) - e_{ij} \right) \right)$;

– расширенный минимаксный $Z_{ME} = \max_p \left(\min_q \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} e_{ij} p_i q_j \right) \right)$;

– азартного игрока $Z_{AG} = \max_i \left(\max_j \left(e_{ij} \right) \right)$.

К производным критериям относят следующие:

– критерий Гурвица $Z_{HW} = \max_i \left(c \cdot \min_j \left(e_{ij} \right) + (1-c) \cdot \max_j \left(e_{ij} \right) \right)$;

− критерий Ходжа-Лемана $Z_{HL} = \max_i \left(v \cdot \sum_{j=1}^{n} e_{ij} q_j + (1-v) \cdot \min_j \left(e_{ij} \right) \right)$;

− критерий Гермейера $Z_G = \max_i \left(\min_j \left(e_{ij} q_j \right) \right)$;

− BL(MM)-критерий

$$I_1 := \left\{ i \middle| i \{1, \ldots, m\} \,\&\, e_{i0j0} - \min_j \left(e_{ij0} \right) \le \varepsilon_{доп} \right\},$$

$$I_2 := \left\{ i \middle| i \{1, \ldots, m\} \,\&\, \max_j \left(e_{ij} \right) - \max_j \left(e_{i0j} \right) \ge e_{i0j0} - \min_j \left(e_{ij0} \right) \right\},$$

$$Z_{BL(MM)} = \max_{I_1 \cap I_2} \left(\sum_{j=1}^{m} e_{ij} q_j \right);$$

− критерий произведений $Z_P = \max_i \left(\prod_{j=1}^{m} e_{ij} q_j \right)$.

Классические критерии принятия решений

Минимаксный критерий принятия решений

Аналитический метод расчета

Математическая интерпретация критерия выглядит следующим образом:

$$Z_{MM} = \max_i \left(\min_j \left(e_{ij} \right) \right).$$

Процесс нахождения оптимального решения рассмотрим на примере.

Заданная матрица решений:

	F_1	F_2

E_1	1	1
E_2	3	3
E_3	7	1
E_4	2	2
E_5	3	1
E_6	4	4
E_7	5	1
E_8	4	2
E_9	5	3
E_{10}	6	2

Шаг 1.

Выбираем минимальное значение в каждой строке.

	F_1	F_2	$\min\limits_j(e_{ij})$
E_1	1	1	1
E_2	3	3	3
E_3	7	1	1
E_4	2	2	2
E_5	3	1	1
E_6	4	4	4
E_7	5	1	1
E_8	4	2	2
E_9	5	3	3
E_{10}	6	2	2

Шаг 2.

Выбираем максимальное значение в добавленном столбце ($\min\limits_j(e_{ij})$).

	F_1	F_2	$\min\limits_j(e_{ij})$
E_1	1	1	1
E_2	3	3	3
E_3	7	1	1
E_4	2	2	2
E_5	3	1	1
E_6	**4**	**4**	**4**
E_7	5	1	1
E_8	4	2	2
E_9	5	3	3
E_{10}	6	2	2
			4

Соответственно оптимальными решениями являются все решения, значения $\min\limits_j(e_{ij})$ которых равны 4. В данном случае имеем одно решение – E_6.

Геометрический метод расчета

Геометрический образ этого критерия представлен на рисунке 3.

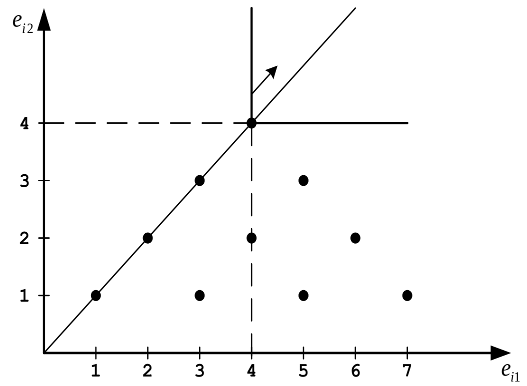

Рис.3. Геометрическое представление минимаксного критерия

Решение на плоскости ищется следующим образом:

Шаг 1.

Строится направляющая – линия, проведенная из начала координат под углом 45°.

Шаг 2. Линия, соответствующая критерию, (прямой угол) движется вдоль направляющей от начала координат до касания последней точки, которая и будет решением. В данном случае точка с координатами (4;4). Решение – E_6.

Критерий Байеса–Лапласа

Аналитический метод расчета

Математическая интерпретация критерия выглядит следующим образом:

$$Z_{BL} = \max_i \left(\sum_{j=1}^{m} e_{ij} q_j \right).$$

где q_j – вероятности условий. Если q_j не заданы, то считаем, что условия равновероятны: $q_1 = q_2 = 0{,}5$.

Процесс нахождения оптимального решения рассмотрим на примере.

Заданная матрица решений:

	F_1	F_2
E_1	1	1
E_2	3	3
E_3	7	1
E_4	2	2
E_5	3	1
E_6	4	4
E_7	5	1
E_8	4	2
E_9	5	3
E_{10}	6	2

Шаг 1.

Находим произведение e_{ij} и соответствующей вероятности q_j в каждой строке.

	F_1	F_2	$e_{i1}q_1$	$e_{i2}q_2$
E_1	1	1	0,5	0,5
E_2	3	3	1,5	1,5
E_3	7	1	3,5	0,5
E_4	2	2	1	1
E_5	3	1	1,5	0,5
E_6	4	4	2	2
E_7	5	1	2,5	0.5
E_8	4	2	2	1
E_9	5	3	2,5	1.5
E_{10}	6	2	3	1

Шаг 2.

Находим сумму значений $e_{i1}q_1$ и $e_{i2}q_2$ для каждой строки.

	F_1	F_2	$e_{i1}q_1$	$e_{i2}q_2$	$\sum_{j=1}^{m} e_{ij}q_j$
E_1	1	1	0,5	0,5	1
E_2	3	3	1,5	1,5	3
$\boldsymbol{E_3}$	**7**	**1**	**3,5**	**0,5**	**4**
E_4	2	2	1	1	2
E_5	3	1	1,5	0,5	2
$\boldsymbol{E_6}$	**4**	**4**	**2**	**2**	**4**
E_7	5	1	2,5	0.5	3
E_8	4	2	2	1	3
$\boldsymbol{E_9}$	**5**	**3**	**2,5**	**1.5**	**4**
$\boldsymbol{E_{10}}$	**6**	**2**	**3**	**1**	**4**
					4

Шаг 3.

Находим максимальное значение в добавленном столбце $\sum_{j=1}^{m} e_{ij}q_j$.

Соответственно оптимальными решениями являются все решения, значения $\sum_{j=1}^{m} e_{ij}q_j$ которых равны 4. В данном случае имеем четыре решения – E_3, E_6, E_9, E_{10}.

Геометрический метод расчета

Геометрический образ этого критерия представлен на рисунке 4.

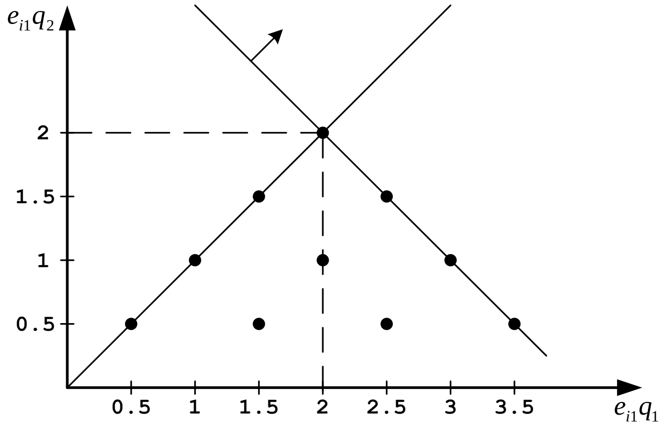

Рис.4. Геометрическое представление критерия Байеса-Лапласа

Решение на плоскости ищется следующим образом:

Шаг 1.

Строим точки с координатами $e_{i1}q_1$ и $e_{i2}q_2$.

	F_1	F_2	$e_{i1}q_1$	$e_{i2}q_2$	$\sum_{j=1}^{m} e_{ij}q_j$
E_1	1	1	0,5	0,5	1
E_2	3	3	1,5	1,5	3
$\boldsymbol{E_3}$	**7**	**1**	**3,5**	**0,5**	**4**
E_4	2	2	1	1	2
E_5	3	1	1,5	0,5	2
$\boldsymbol{E_6}$	**4**	**4**	**2**	**2**	**4**
E_7	5	1	2,5	0.5	3
E_8	4	2	2	1	3
$\boldsymbol{E_9}$	**5**	**3**	**2,5**	**1.5**	**4**
$\boldsymbol{E_{10}}$	**6**	**2**	**3**	**1**	**4**

Шаг 2.

Строится направляющая – линия, проведенная из начала координат под углом 45°.

Шаг 3.

Линия, соответствующая критерию, – прямая, перпендикулярная направляющей, движется вдоль направляющей от начала координат до касания последней точки, которая и будет решением. В данном случае это точки с координатами (2;2), (2,5;1,5), (3,5;0,5), (3,1). Решения – E_3, E_6, E_9, E_{10}.

Критерий Сэвиджа

Аналитический метод расчета

Математическая интерпретация критерия выглядит следующим образом:

$$Z_S = \min_i \left(\max_j \left(\max_i \left(e_{ij} \right) - e_{ij} \right) \right).$$

Процесс нахождения оптимального решения рассмотрим на примере.

Заданная матрица решений:

	F_1	F_2
E_1	1	1
E_2	3	3
E_3	7	1
E_4	2	2
E_5	3	1
E_6	4	4
E_7	5	1
E_8	4	2
E_9	5	3
E_{10}	6	2

Шаг 1. Находим максимальное значение в каждом из столбцов.

	F_1	F_2
E_1	1	1
E_2	3	3
E_3	7	1
E_4	2	2
E_5	3	1
E_6	4	4
E_7	5	1
E_8	4	2
E_9	5	3
E_{10}	6	2
	7	4

Шаг 2.

Каждый элемент матрицы решений вычитается из наибольшего результата соответствующего столбца. Эти разности образуют матрицу остатков.

	F_1	F_2
E_1	6	3
E_2	4	1
E_3	0	3
E_4	5	2
E_5	4	3
E_6	3	0
E_7	2	3
E_8	3	2
E_9	2	1
E_{10}	1	2
	7	4

Шаг 3.

Эта матрица пополняется столбцом наибольших разностей $e_{ir} = \max_j\left(\max_i\left(e_{ij}\right) - e_{ij}\right)$:

	F_1	F_2	e_{ir}
E_1	6	3	6
E_2	4	1	4
E_3	0	3	3
E_4	5	2	5
E_5	4	3	4
E_6	3	0	3
E_7	2	3	3
E_8	3	2	3
$\boldsymbol{E_9}$	**2**	**1**	**2**
$\boldsymbol{E_{10}}$	**1**	**2**	**2**
			2

Выбираются те решения E_i, в строках которых стоит наименьшее значение для этого столбца. Соответственно оптимальными решениями являются все решения, значения e_{ir} которых равны 2. В данном случае имеем два решения – E_9 и E_{10}.

Геометрический метод расчета

Геометрический образ этого критерия представлен на рисунке 5.

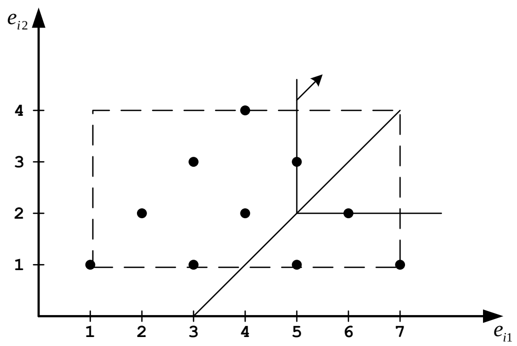

Рис.5 Геометрическое представление критерия Сэвиджа

Решение на плоскости ищется следующим образом:

Шаг 1.

Строим направляющую – прямую, проходящую через утопическую точку под 45°.

Шаг 2.

Линия, соответствующая критерию, – прямой угол, движется вдоль направляющей от начала координат до касания последней точки, которая и будет решением. В данном случае это точки с координатами (5;3), (6;2), т.е. E_9 и E_{10}.

Производные критерии принятия решений

Критерий принятия решений Гурвица

Математическая интерпретация

$$Z_{HW} = \max_i (c \min_j (e_{ij}) + (1-c) \max_j (e_{ij})) .$$

Аналитический метод расчета

Дана матрица решений:

	F_1	F_2
E_1	1	1
E_2	3	3
E_3	7	1
E_4	2	2
E_5	3	1
E_6	4	4
E_7	5	1
E_8	4	2
E_9	5	3
E_{10}	6	2

Шаг 1. Выбираем минимальное и максимальное значение в каждой строке.

	F_1	F_2	$\min_j(e_{ij})$	$\max_j(e_{ij})$
E_1	1	1	1	1
E_2	3	3	3	3
E_3	7	1	1	7
E_4	2	2	2	2
E_5	3	1	1	3
E_6	4	4	4	4
E_7	5	1	1	5
E_8	4	2	2	4
E_9	5	3	3	5
E_{10}	6	2	2	6

Шаг 2. Выбираем значение коэффициента c. В технических приложениях правильно выбрать множитель с бывает так же трудно, как правильно выбрать критерий. Вряд ли возможно найти количественную характеристику для тех долей оптимизма и пессимизма, которые присутствуют при принятии решения. Поэтому чаще всего весовой множитель c=0,5 без возражений принимается в качестве некоторой «средней» точки зрения. Для нашего примера примем c=0,4.

Шаг 3. Домножаем $\min_j(e_{ij})$ на c, $\max_j(e_{ij})$ на (1-c).

	F_1	F_2	$\min_j(e_{ij})$	$\max_j(e_{ij})$	$c\min_j(e_{ij})$	$(1-c)\max_j(e_{ij})$
E_1	1	1	1	1	0,4	0,6
E_2	3	3	3	3	1,2	1,8
E_3	7	1	1	7	0,4	4,2
E_4	2	2	2	2	0,8	1,2

E_5	3	1	1	3	0,4	1,8
E_6	4	4	4	4	1,6	2,4
E_7	5	1	1	5	0,4	3
E_8	4	2	2	4	0,8	2,4
E_9	5	3	3	5	1,2	3
E_{10}	6	2	2	6	0,8	3,6

Шаг 4. Находим сумму $c\min\limits_j(e_{ij})$ и $(1-c)\max\limits_j(e_{ij})$.

	F_1	F_2	$\min\limits_j(e_{ij})$	$\max\limits_j(e_{ij})$	$c\min\limits_j(e_{ij})$	$(1-c)\max\limits_j(e_{ij})$	$c\min\limits_j(e_{ij})+(1-c)\max\limits_j(e_{ij})$
E_1	1	1	1	1	0,4	0,6	1
E_2	3	3	3	3	1,2	1,8	3
$\boldsymbol{E_3}$	**7**	**1**	**1**	**7**	**0,4**	**4,2**	**4,8**
E_4	2	2	2	2	0,8	1,2	2
E_5	3	1	1	3	0,4	1,8	2,2
E_6	4	4	4	4	1,6	2,4	4
E_7	5	1	1	5	0,4	3	3,4
E_8	4	2	2	4	0,8	2,4	3,2
E_9	5	3	3	5	1,2	3	4,2
E_{10}	6	2	2	6	0,8	3,6	4,4
							4,8

Шаг 5.

Находим максимум из столбца $c\min\limits_j(e_{ij})+(1-c)\max\limits_j(e_{ij})$. Оптимальное решение: все решения для которых $c\min\limits_j(e_{ij})+(1-c)\max\limits_j(e_{ij})$ максимально. В нашем случае это E_3.

Геометрический метод расчета

Геометрическое решение можно найти используя преобразованную плоскость решений.

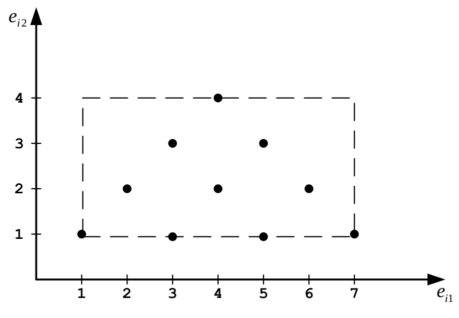

Рис.6. Исходная плоскость множества решений

Решение на плоскости ищется следующим образом:

Шаг 1.

Строится новая плоскость решений, где осями будут не e_{i1} и e_{i2}, а $c\min\limits_j(e_{ij})$ и $(1-c)\max\limits_j(e_{ij})$. На этой плоскости строятся точки соответствующие решениями.

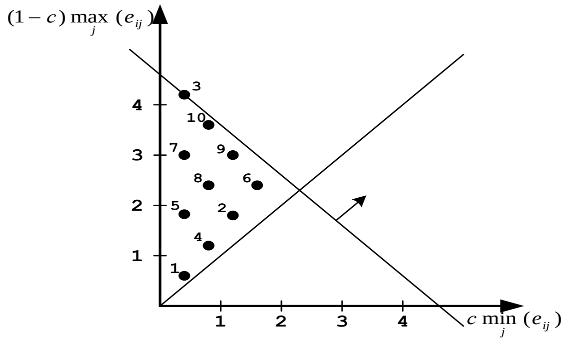

Рис.7. Преобразованная плоскость решений

Шаг 2.

Строится направляющая – линия, проведенная из начала координат под углом 45°.

Шаг 3.

Линия, соответствующая критерию прямой движется вдоль направляющей от начала координат до касания последней точки, которая и будет решением. В данном случае точка с координатами (0,4; 4,2), т.е. E_3.

Критерий принятия решений Гермейера

Математическая интерпретация

$$Z_G = \max_i(\min_j(e_{ij} q_j)),$$

где q_j – вероятность условия F_j. Если о задаче ничего не известно, то принимаем $q_1 = q_2 = 0{,}5$.

Аналитический метод расчета

Дана матрица решений:

	F_1	F_2
E_1	1	1
E_2	3	3
E_3	7	1
E_4	2	2
E_5	3	1
E_6	4	4
E_7	5	1
E_8	4	2
E_9	5	3
E_{10}	6	2

$q_1 = 0{,}4$ и $q_2 = 0{,}6$.

Шаг 1. Умножаем каждое e_{ij} на соответствующий ему q_j, т.е.

	F_1	F_2	$q_1 e_{i1}$	$q_2 e_{i2}$
E_1	1	1	0,4	0,6
E_2	3	3	1,2	1,8
E_3	7	1	2,8	0,6
E_4	2	2	0,8	1,2

E_5	3	1	1,2	0,6
E_6	4	4	1,6	2,4
E_7	5	1	2	0,6
E_8	4	2	1,6	1,2
E_9	5	3	2	1,8
E_{10}	6	2	2,4	1,2

Шаг 2. Выбираем минимум в каждой строке.

	F_1	F_2	q_1e_{i1}	q_2e_{i2}	$\min\limits_j(e_{ij}q_j)$
E_1	1	1	0,4	0,6	0,4
E_2	3	3	1,2	1,8	1,2
E_3	7	1	2,8	0,6	0,6
E_4	2	2	0,8	1,2	0,8
E_5	3	1	1,2	0,6	0,6
E_6	4	4	1,6	2,4	1,6
E_7	5	1	2	0,6	0,6
E_8	4	2	1,6	1,2	1,2
$\boldsymbol{E_9}$	**5**	**3**	**2**	**1,8**	**1,8**
E_{10}	6	2	2,4	1,2	1,2
					1,8

Шаг 3.

Находим максимум в последнем столбце. Оптимальное решение: все решения для которых $\min\limits_j(e_{ij}q_j)$ максимально. В нашем случае это E_9.

Геометрический метод расчета

Геометрическое решение можно найти используя преобразованную плоскость решений.

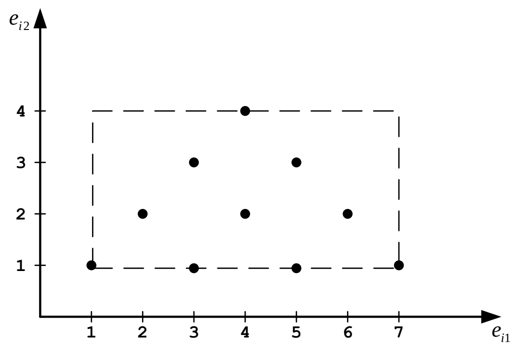

Рис.8. Исходная плоскость множества решений

Решение на плоскости ищется следующим образом:

Шаг 1.

Строится новая плоскость решений, где осями будут не e_{i1} и e_{i2}, а q_1e_{i1} и q_2e_{i2}. На этой плоскости строятся точки соответствующие решениями.

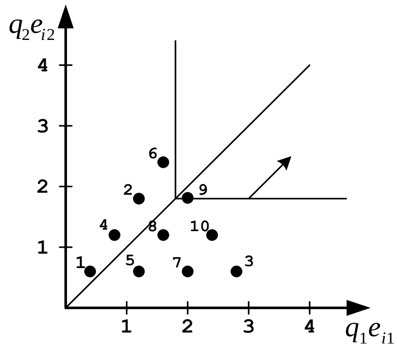

Рис.9. Новая плоскость множества решений

Шаг 2.

Строится направляющая –линия проведенная из начала координат под углом 45°.

Шаг 3.

Линия, соответствующая критерию (прямой угол) движется вдоль направляющей от начала координат до касания последней точки, которая и будет решением. В данном случае точка с координатами (2; 1,2), т.е. E_9.

Критерий произведений

Математическая интерпретация

$$Z_P = \max_i \left(\prod_{j=1}^{m} e_{ij} \right).$$

Аналитический метод расчета

Дана матрица решений:

	F_1	F_2
E_1	1	1
E_2	3	3
E_3	7	1
E_4	2	2
E_5	3	1
E_6	4	4
E_7	5	1
E_8	4	2
E_9	5	3
E_{10}	6	2

Шаг 1. Находим произведение e_{i1} и e_{i2}.

	F_1	F_2	$e_{i1} \cdot e_{i2}$
E_1	1	1	1
E_2	3	3	9
E_3	7	1	7
E_4	2	2	4

E_5	3	1	3
$\boldsymbol{E_6}$	**4**	**4**	**16**
E_7	5	1	5
E_8	4	2	8
E_9	5	3	15
E_{10}	6	2	12

Шаг 2. Находим максимум в последнем столбце.

	F_1	F_2	$e_{i1} \cdot e_{i2}$
E_1	1	1	1
E_2	3	3	9
E_3	7	1	7
E_4	2	2	4
E_5	3	1	3
$\boldsymbol{E_6}$	**4**	**4**	**16**
E_7	5	1	5
E_8	4	2	8
E_9	5	3	15
E_{10}	6	2	12
			16

Оптимальное решение: все решения для которых $e_{i1} \cdot e_{i2}$ максимально. В нашем случае это E_6.

Геометрический метод расчета

Геометрическое решение можно найти используя преобразованную плоскость решений.

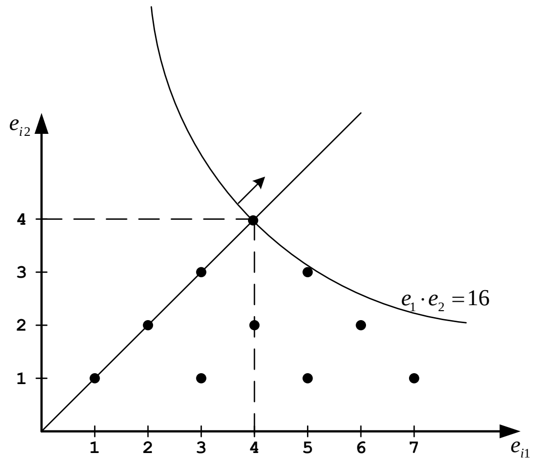

Рис.10. Метод произведений

Решение на плоскости ищется следующим образом:

Шаг 1.

Строится направляющая – линия, проведенная из начала координат под углом 45°.

Шаг 2.

Линия, соответствующая критерию, (парабола) движется вдоль направляющей от начала координат до касания последней точки, которая и будет решением. В данном случае это точка с координатами (4; 4), т.е. E_6.

Порядок выполнения работы

1. Согласно номеру своего варианта получите задание.
2. Аналитическим и геометрическим методами расчета проанализировать ситуацию и выбрать оптимальную стратегию на основе:
   1) минимаксного критерия Вальда;
   2) критерия Байеса-Лапласа при заданном распределении вероятностей состояний спроса $P=(p_1,p_2)$;
   3) критерия минимального риска Сэвиджа;
   4) критерия Гурвица при заданном значении λ;
   5) критерия Гермейера при заданном распределении вероятностей состояний спроса $P=(p_1,p_2)$;
   6) критерия произведений.

Варианты заданий

Магазин может завезти в различных пропорциях товары трех типов в соответствии с возможными стратегиями A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8. Их реализация и прибыль магазина зависят от вида товара и состояния спроса. Предполагается, что спрос может иметь два состояния P_1, P_2. Задана матрица, элементы которой a_{ij} характеризуют прибыль магазина в случае, если его администрация руководствуется стратегией A_i, а спрос принимает состояние P_j.

1.	P_1	P_2
A_1	0	6
A_2	4	5
A_3	6	1
A_4	2	3
A_5	3	4
A_6	−1	2
A_7	5	2
A_8	4	6

$P=(0{,}2;p_2)$ $\lambda=0{,}6$

2.	P_1	P_2
A_1	8	4
A_2	−2	1
A_3	6	3
A_4	5	6
A_5	4	2
A_6	−1	7
A_7	2	4
A_8	3	1

$P=(0{,}3;p_2)$ $\lambda=0{,}7$

3.	P_1	P_2
A_1	−2	1
A_2	0	2
A_3	−2	−3
A_4	−4	2
A_5	−3	−1
A_6	−5	3
A_7	−1	−2
A_8	0	1

$P=(0{,}4;p_2)$ $\lambda=0{,}5$

4.	P_1	P_2
A_1	0	12
A_2	8	10
A_3	12	1
A_4	4	6
A_5	6	8
A_6	−1	2
A_7	4	1
A_8	2	1

$P=(0{,}6;p_2)$ $\lambda=0{,}7$

5.	P_1	P_2
A_1	4	6
A_2	10	7
A_3	2	4
A_4	5	−4
A_5	9	15
A_6	6	−3
A_7	4	1
A_8	2	1

$P=(0{,}7;p_2)$ $\lambda=0{,}6$

6.	P_1	P_2
A_1	2	3
A_2	6	4
A_3	9	2
A_4	4	4
A_5	5	7
A_6	0	1
A_7	3	2
A_8	2	1

$P=(0{,}2;p_2)$ $\lambda=0{,}5$

7.	P_1	P_2
A_1	10	6
A_2	14	4
A_3	20	−2
A_4	8	6
A_5	0	−2
A_6	−8	4
A_7	−6	−8
A_8	4	2

$P=(0{,}3;p_2)$ $\lambda=0{,}6$

8.	P_1	P_2
A_1	8	2
A_2	6	4
A_3	9	−2
A_4	3	2
A_5	−1	−3
A_6	−5	1
A_7	3	1
A_8	−2	1

$P=(0{,}4;p_2)$ $\lambda=0{,}5$

9.	P_1	P_2
A_1	−2	1
A_2	−2	−3
A_3	0	2
A_4	−4	2
A_5	−5	3
A_6	−3	−1
A_7	1	0
A_8	−1	1

$P=(0{,}6;p_2)$ $\lambda=0{,}7$

10.	P_1	P_2
A_1	5	3
A_2	7	2
A_3	10	−1
A_4	4	3
A_5	0	−2
A_6	−4	2
A_7	2	−1
A_8	3	1

$P=(0{,}2;p_2)$ $\lambda=0{,}6$