

Линейное программирование



НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
СТРОИТЕЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

$$L(X) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \rightarrow \max(\min)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m, \\ x_1, x_2, \dots, x_k \geq 0 \quad (k \leq n). \end{array} \right.$$

$$L(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max(\min)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \\ x_1, x_2, \dots, x_k \geq 0 \quad (k \leq n). \end{array} \right.$$

$$L(X) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \rightarrow \max(\min)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq (\geq, =)b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq (\geq, =)b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq (\geq, =)b_m, \\ x_1, x_2, \dots, x_k \geq 0 \quad (k \leq n). \end{array} \right.$$



- 1) обозначить переменные;
- 2) составить целевую функцию в соответствии с целью задачи;
- 3) записать систему ограничений с учетом имеющихся в условии задачи показателей.

Пример. Предприятие осуществляет перевозку двух видов товаров. Для перевозок используется два вида упаковок A и B . Максимально возможные суточные запасы этих упаковок составляют 6 и 8 шт. соответственно. Известны расходы упаковок A и B на 1 т соответствующих товаров

Упаковки	Расход упаковок, шт./т товара		Запас, шт./сутки
	Товар 1	Товар 2	
A	1	2	6
B	2	1	8

Суточный спрос на второй товар никогда не превышает спроса на первый товар более чем на 1 т. Кроме того, спрос на второй товар никогда не превышает 2 т в сутки. Доход от перевозок первого товара составляет 3 тыс. руб. за 1 т в сутки; второго товара – 2 тыс. руб. за 1 т в сутки. Построить математическую модель, позволяющую установить, какой объем товаров надо перевозить, чтобы доход был максимальным.

Пример

Рассмотрим процесс производства соков из фруктового концентрата и воды. В зависимости от соотношения воды и концентрата, получается либо 100% сок, либо нектар (50% сока).

Сок продается по 40 руб., а нектар за 30 руб. за литр.

Затраты сырья на производство одного литра сока или нектара приведены в таблице:

	Нектар	Сок
Концентрат	2	6
Вода	4	2

В запасе имеется 36 единиц концентрата и 30 воды.

Требуется максимизировать доход от продаж.

Относительно спроса известно, что сока можно продать не более 10 литров, нектара – на 5 литров больше, чем продано сока. (Т.е. если сока продано 5 литров, то нектара можно продать не больше 7 литров).

Описание экономической задачи. «Задача потребителя» является классической задачей микроэкономики. Покупатель в магазине осуществляет выбор между покупкой овощей: картофеля и огурцов. Удовлетворение от покупки огурцов составляет для потребителя 20 у.е., от покупки картофеля — 10 у.е. Стоимость огурцов составляет 30 руб./кг, а картофеля — 20 руб./кг. Выбор потребителя при этом ограничен бюджетом в 100 руб. Требуется определить такой набор из овощей, который принесет наибольшее удовлетворение при условии бюджетного ограничения.

Пример. Составить математическую модель задачи: На четырех станках (I, II, III, IV) обрабатываются два вида деталей (A и B). Каждая деталь проходит обработку на всех станках. Известны время обработки деталей на каждом станке, время работы станков в течение одного цикла производства и прибыль, полученная от выпуска одной детали. Данные приведены в таблице:

Станки	Время обработки детали, ч.		Время работы станка (цикл пр-ва), ч.
	A	B	
I	1	2	16
II	2	3	26
III	1	1	10
IV	3	1	24
Прибыль от 1 детали, УДЕ4	4	1	

Составить план производства, обеспечивающий наибольшую прибыль при условии, что количество деталей вида B не должно быть меньше количества деталей вида A.

Пример . Для поддержания нормальной жизнедеятельности человеку ежедневно необходимо потреблять белки, жиры, углеводы, минеральные соли. Количество питательных веществ, содержащихся в 1 кг имеющихся продуктов питания, а также их стоимость и нормы суточной потребности питательных веществ изображены в виде матрицы (таблица 1).

Требуется составить дневной рацион продуктов питания, содержащий не менее суточной нормы потребности человека в необходимых питательных веществах и обеспечивающий минимальную общую стоимость продуктов.

Таблица 1

Стоимость продуктов и нормы суточной потребности питательных веществ

Питательные вещества	Содержание питательных веществ в 1 кг продуктов, г/кг							Норма в сутки, г
	Мясо	Рыба	Молоко	Масло	Сыр	Крупа	Картофель	
Белки, г	180	190	30	70	260	130	21	118
Жиры, г	20	3	40	865	310	30	2	56
Углеводы, г	0	0	50	6	20	650	200	500
Минеральные соли, г	9	10	7	12	60	20	70	8
Цена 1 кг продукта, руб./кг	1,9	1,0	0,28	3,4	2,9	0,5	0,1	

Пример 3.2. Инвестор, располагающий суммой в 300 тыс. ден. ед., может вложить свой капитал в акции автомобильного концерна A и строительного предприятия B . Чтобы уменьшить инвестиционные риски, акций концерна A должно быть приобретено не меньше, чем акций строительного предприятия B , причем последних можно купить не более чем на 100 тыс. ден. ед. Дивиденды по акциям A составляют 8%, а по акциям B – 10% в год. Определить, какую максимальную прибыль может получить инвестор в первый год.

Пример 3.3. Кондитерская фабрика для производит карамель трех видов и использует три вида основного сырья: сахарный песок, патоку и фруктовое пюре. Нормы расхода сырья на каждого вида на производство 1 т карамели данного вида, а также запасы сырья каждого вида и прибыль от реализации 1 т карамели каждого вида приведены в табл. 3.2.

Требуется составить план производства карамели, обеспечивающий максимум прибыли от ее реализации.

Таблица 3.2

Нормы расхода сырья, запасы сырья и прибыль от реализации

Вид сырья	Нормы расхода сырья на 1 т карамели, т			Запасы сырья, т
	А	В	С	
Сахарный песок	0,8	0,5	0,6	800
Патока	0,2	0,4	0,3	600
Фруктовое пюре	0	0,1	0,1	120
Прибыль от реализации 1 т продукции, тыс. руб.	108	112	126	

Металлургическому комбинату требуется уголь с содержанием фосфора не более 0,03 % и с долей зольных примесей не более 3,25 %. Комбинат закупает три сорта угля А, В и С, с известным содержанием примесей. В какой пропорции нужно смешивать сорта угля А, В и С, чтобы полученная смесь удовлетворяла ограничениям на содержание примесей и имела минимальную цену?

Содержание примесей и цена каждого сорта угля приведены в таблице 1.

Таблица 1

Сорт угля	Содержание, %		Цена 1 т., руб.
	фосфора	зола	
А	0,06	2,0	30
В	0,04	4,0	30
С	0,02	3,0	45

Рацион для питания животных на ферме состоит из двух видов кормов I и II. Один кг корма I вида стоит 80 р. и содержит: 3 ед. белков, 1 ед. жиров, 1 ед. углеводов, 2 ед. нитратов. Один кг корма II вида стоит 10 р. и содержит: 1 ед. белков, 3 ед. жиров, 8 ед. углеводов, 4 ед. нитратов.

Составить наиболее дешевый рацион питания, обеспечивающий белков не менее 9 ед., жиров не менее 6 ед., углеводов не менее 8 ед., нитратов не более 16 ед.

Намечается выпуск двух видов костюмов – мужских и женских. На женский костюм требуется 1 м шерсти, 2 м лавсана и 1 человеко-день трудозатрат. На мужской костюм – 3,5 м шерсти, 0,5 м лавсана и 1 человеко-день трудозатрат. Всего имеется 350 м шерсти, 240 м лавсана и 150 человеко-дней трудозатрат. Требуется определить, сколько костюмов каждого вида необходимо сшить, чтобы обеспечить максимальную прибыль, если прибыль от реализации женского костюма составляет 10 денежных единиц, а от мужского – 20 денежных единиц. При этом следует иметь в виду, что необходимо сшить не менее 60 мужских костюмов.

На двух автоматических линиях выпускают аппараты трех типов: А, В и С. Другие данные условия задачи приведены в таблице 3.

Составить такой план загрузки станков, чтобы затраты были минимальными, а задание выполнено не более чем за 10 суток.

Таблица 3

Тип аппарата	Производительность работы линий, шт/сут		Затраты на работу линий, р/сут		План, шт
	1	2	1	2	
А	4	3	400	300	20
В	6	5	100	200	40
С	8	2	300	400	50