Моделирование систем с использованием Марковских случайных процессов

Основные понятия Марковских процессов

Функция $X(t)$ называется **случайной**, если ее значение при любом аргументе t является случайной величиной.

Случайная функция $X(t)$, аргументом которой является время, называется **случайным процессом.**

Случайный процесс, протекающий в какой-либо системе S, называется **Марковским** (или процессом без последействия), если он обладает следующим свойством: для любою момента времени t_0 вероятность любого состояния системы в будущем (при $t > t_0$) зависит только от ее состояния в настоящем (при $t = t_0$) и не зависит от того, когда и каким образом система S пришла в это состояние.

Классификация Марковских случайных процессов производится в зависимости от непрерывности или дискретности множества значений функции $X(t)$ и параметра t. Различают следующие основные виды Марковских случайных процессов:

- с дискретными состояниями и дискретным временем (*цепь Маркова*);
- с непрерывными состояниями и дискретным временем (*Марковские последовательности*);
- с дискретными состояниями и непрерывным временем (*непрерывная цепь Маркова*);
- с непрерывным состоянием и непрерывным временем.

Марковские случайные процессы с дискретными состояниями и дискретным временем

Марковские процессы с дискретными состояниями удобно иллюстрировать с помощью так называемого *графа состояний* (рис. 2.1), где кружками обозначены состояния S_1, S_2, ... системы S, а стрелками – возможные переходы из состояния в состояние. На графе отмечаются только непосредственные переходы, а не переходы через другие состояния. Возможные задержки в прежнем состоянии изображают «петлей», т. е. стрелкой, направленной из данного состояния в него же. Число состояний системы может быть как конечным, так и бесконечным (но счетным). Пример графа состояний системы S представлен на рис.2.1.

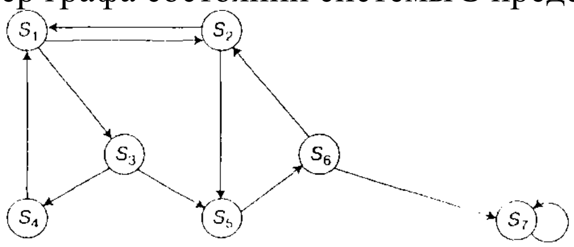

Рис. 2.1. Граф состояний системы S

Марковский случайный процесс с дискретными состояниями и дискретным временем называют **марковской цепью**. Для такого процесса моменты t_1, t_2, …, когда система S может менять свое состояние, рассматривают как последовательные шаги процесса, а в качестве аргумента, от которого зависит процесс, выступает не время t, а номер шага 1, 2, ..., k, ... Случайный процесс в этом случае характеризуется последовательностью состояний $S(0)$, $S(1)$, $S(2)$, ..., $S(k)$, ..., где $S(0)$ – начальное состояние системы (перед первым шагом); $S(1)$ – состояние системы после первого шага; $S(k)$ – состояние системы после k-го шага.

Вероятностями состояний цепи Маркова называются вероятности $P_i(k)$ того, что после k-го шага (и до $(k + 1)$-го) система S будет находиться в состоянии S_i ($i = 1, 2, ..., n$). Очевидно, для любого k

$$\sum_{i=1}^{n} P_i(k) = 1. \tag{1}$$

Начальным распределением вероятностей Марковской цепи называется распределение вероятностей состояний в начале процесса:

$$P_1(0), P_2(0), \ldots, P_i(0), \ldots, P_n(0). \tag{2}$$

В частном случае, если начальное состояние системы S в точности известно $S(0) = S_i$, то начальная вероятность $P_i(0)=1$, а все остальные равны нулю.

Вероятностью перехода (переходной вероятностью) на k-м шаге из состояния S_i в состояние S_j называется условная вероятность того, что система S после k-го шага окажется в состоянии S_j при условии, что непосредственно перед этим (после k - 1 шага) она находилась в состоянии S_i.

Поскольку система может пребывать в одном из n состояний, то для каждого момента времени t необходимо задать n^2 вероятностей перехода P_{ij}, которые удобно представить в виде следующей матрицы:

$$\left\| P_{ij} \right\| = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & \ldots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \ldots & P_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ P_{n1} & P_{n2} & \ldots & P_{nn} \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где P_{ij} – вероятность перехода за один шаг из состояния S_i в состояние S_j;
P_{ii} – вероятность задержки системы в состоянии S_i.

Матрица (3) называется **переходной или матрицей переходных вероятностей**.

Если переходные вероятности не зависят от номера шага (от времени), а зависят только от того, из какого состояния в какое осуществляется переход, то соответствующая цепь Маркова называется однородной.

Переходные вероятности однородной Марковской цепи P_{ij} образуют квадратную матрицу порядка n. Отметим некоторые ее особенности:

1. Каждая строка характеризует выбранное состояние системы, а ее элементы представляют собой вероятности всех возможных переходов за один шаг из выбранного (из i-го) состояния, в том числе и переход в самое себя.
2. Элементы столбцов показывают вероятности всех возможных переходов системы за один шаг в заданное (j-е) состояние (иначе говоря, строка характеризует вероятность перехода системы из состояния, столбец – в состояние).
3. Сумма вероятностей каждой строки равна единице, так как переходы образуют полную группу несовместных событий:

$$\sum_{j=1}^{n} P_{ij} = 1,\ i = \overline{1,n}\,. \tag{4}$$

4. По главной диагонали матрицы переходных вероятностей стоят вероятности P_{ii} того, что система не выйдет из состояния S_i, а останется в нем.

Если для однородной Марковской цепи заданы начальное распределение вероятностей (2) и матрица переходных вероятностей $\left\| P_{ij} \right\|$ (3), то вероятности состояний системы $P_i(k)$ (i, j = 1, 2, …, n) определяются по рекуррентной формуле:

$$P_i(k) = \sum_{j=1}^{n} P_j(k-1) \cdot P_{ji}\,. \tag{5}$$

Все многообразие Марковских цепей подразделяется на эргодические и разложимые.

Разложимые Марковские цепи содержат невозвратные состояния, называемые поглощающими. Из поглощающего состояния нельзя перейти ни в какое другое. На графе поглощающему состоянию соответствует вершина, из которой не выходит ни одна дуга. В установившемся режиме поглощающему состоянию соответствует вероятность, равная 1.

Эргодические Марковские цепи описываются сильно связанным графом. Это означает, что в такой системе возможен переход из любого состояния S_i в любое состояние S_j (i,j=1,…,n) за конечное число шагов.

Для эргодических цепей при достаточно большом времени функционирования (t стремится к бесконечности) наступает стационарный режим, при котором вероятности P_i состояний системы не зависят от времени и не зависят от распределения вероятностей в начальный момент времени, т.е. P_i=const.

Каждая компонента P_i вектора таких стационарных вероятностей характеризует среднюю долю времени, в течение которого система находится в рассматриваемом состоянии S_i за время наблюдения, измеряемое k шагами.

Для определения стационарных вероятностей P_i нахождения системы в состоянии S_i (i=1,...,n) нужно составить систему n линейных однородных алгебраических уравнений с n неизвестными:

$$P_i = \sum_{j=1}^{n} P_j P_{ji}\ , (i=1,\ldots,n). \tag{6}$$

Причем, искомые вероятности должны удовлетворять условию:

$$\sum_{i=1}^{n} P_i = 1. \tag{7}$$

Систему линейных алгебраических уравнений (7) удобно составлять непосредственно по размеченному графу состояний. При этом в левой части уравнения записывается вероятность состояния, соответствующего рассматриваемой вершине графа, а в правой части – сумма произведений. Число слагаемых соответствует числу дуг графа, входящих в рассматриваемое состояние. Каждое слагаемое представляет произведение вероятности того состояния, из которого выходит дуга графа, на переходную вероятность, которой помечена соответствующая дуга графа.

Непрерывные цепи Маркова

Марковский случайный процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем называется **непрерывной цепью Маркова** при условии, что переход системы из состояния в состояние происходит не в фиксированные, а в случайные моменты времени.

В экономике часто встречаются ситуации, которые указать заранее невозможно. Например, любая деталь или агрегат могут выходить из строя в любой, непредсказуемый заранее момент времени. Для описания таких систем и отдельных случаев можно использовать математический аппарат непрерывной цепи Маркова.

Пусть $S_1,\ldots,S_n$ – всевозможные состояния системы S. Вероятность $p_i(t) = p(S_i(t)),\ i=1,\ldots,n; t\geq 0;\ t\geq 0$ события $S_i(t)$, состоящего в том, что система S в момент времени t находится в состоянии S_i, называется вероятностью i-ого состояния системы в момент времени. Вероятность состояния $p_i(t)$ является, таким образом, вероятностной функцией времени $t\geq 0$.

Так как в любой момент времени t система S будет находиться только в одном из состояний $S_1,\ldots,S_n$, то события $S_i(t), i=1,\ldots,n$ несовместны и образуют полную группу. Поэтому имеет место нормировочное условие: $\sum_{t=1}^{n} p_i(t) = 1, \forall t \geq 0$.

Плотностью вероятности перехода системы S из состояния S_i в состояние S_j в момент времени t называется величина $\lambda_{ij}(t)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{p_{ij}(t;\Delta t)}{\Delta t}$, откуда следует, что $p_{ij}(t;\Delta t)\approx\lambda_{ij}(t)*\Delta t, \Delta t\to 0$. Из определения плотностей вероятности перехода $\lambda_{ij}(t)$ видно, что они в общем случае зависят от времени *t*, неотрицательны и в отличие от вероятностей могут быть больше 1.

Если при любых $i\neq j; i,j=1,...,n$ плотности вероятностей переходов не зависят от времени *t*, и тогда вместо $\lambda_{ij}(t)$ будем писать просто λ_{ij}, то Марковский процесс с непрерывным временем называется **однородным**. Если же хотя бы при одной паре значений $i\neq j$ плотность вероятности перехода λ_{ij} изменяется с течением времени *t*, процесс называется **неоднородным**.

Вероятности состояний $p_i(t), i=1,...,n$ (неизвестные вероятностные функции) являются решением следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{dp_i(t)}{dt}=-\left(\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}\right)p_i(t)+\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ji}p_j(t), i=1,...,n; t\geq 0.$$

Система представляет собой систему *n* обыкновенных линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами. Эта система называется **системой дифференциальных уравнений Колмогорова.**

Составить систему Колмогорова удобно по одному из следующих правил:

1) правило составления системы дифференциальных уравнений Колмогорова по размеченному графу состояний.

Для того чтобы составить дифференциальное уравнение Колмогорова для функции $p_i(t), i=1,...,n$, надо в левой части этого уравнения записать производную $\frac{dp_i(t)}{dt}$ функции $p_i(t)$, а в правой части уравнения – произведение – $(\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij})p_i(t)$ суммы $\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}$ плотностей вероятностей переходов λ_{ij} у стрелок, выходящих из состояния S_i, на вероятность $p_i(t)$ этого состояния со знаком минус, плюс сумму $\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ji}p_j(t)$ произведений $\lambda_{ji}p_j(t)$ плотностей вероятностей переходов λ_{ji}, соответствующих стрелкам, входящим в состояние S_i, на вероятности состояний $p_j(t)$, из которых эти стрелки выходят. При этом плотности вероятностей переходов λ_{ij}, соответствующие отсутствующим стрелкам на графе, равны 0.

2) правило составления дифференциальных уравнений Колмогорова по матрице плотностей вероятностей переходов.

Для составления дифференциального уравнения Колмогорова для функции $p_i(t), i=1,...,n$ надо в левой части уравнения записать производную $\frac{dp_i(t)}{dt}$ функции $p_i(t)$, а в правой части уравнения – произведение – $(\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij})p_i(t)$ суммы $\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}$ элементов λ_{ij} i-ой строки матрицы Λ плотностей вероятностей на вероятность $p_i(t)$ состояния S_i (номер которой совпадает с номером взятой строки) со знаком минус, плюс сумму $\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ji}p_j(t)$ произведений $\lambda_{ji}p_j(t)$ элементов i-го столбца на соответствующие им вероятности $p_j(t)$.

Итак, составлять систему дифференциальных уравнений Колмогорова можно либо по размеченному графу состояний, либо по матрице плотностей вероятностей переходов. Для решения этой системы применяют численные методы.

Если процесс, протекающий в системе, длится достаточно долго, то имеет смысл говорить о предельном поведении вероятностей $P_i(t)$ при $t\to\infty$. В некоторых случаях существуют финальные (предельные) вероятности состояний $P_i = \lim_{t\to\infty} P_i(t)$, не зависящие от того, в каком состоянии система находилась в начальный момент. Говорят, что в системе устанавливается предельный стационарный режим, в ходе которого она переходит из состояния в состояние, но вероятности уже не меняются. Система, для которой существуют финальные вероятности называется **эргодической**, а соответствующий случайный процесс – **эргодическим**.

Финальные вероятности состояний могут быть получены путем решения системы линейных алгебраических уравнений, которые получаются из дифференциальных уравнений Колмогорова, если приравнять производные к нулю, а вероятностные функции состояний $P_1(t),\ldots,P_n(t)$ в правых частях уравнений заменить соответственно на неизвестные финальные вероятности $P_1,\ldots,P_n$. Для нахождения точного значения $P_1,\ldots,P_n$. к уравнениям добавляют нормировочное условие $P_0+P_1+\ldots+P_n=1$.

Потоки событий

При исследовании непрерывных Марковских цепей, как было уже отмечено, часто бывает удобно представить переход системы из состояния в состояние как воздействие каких-то потоков событии (поток заявок на обслуживание, поток автомобилей, поток документов и т.п.).

Потоком событий называется последовательность событий, наступающих одно за другим в какие-то, вообще говоря, случайные моменты времени.

События в потоке называются **однородными**, если их различают только по моментам их наступления, и **неоднородными** – в противном случае, то есть если различимость событий в потоке помимо моментов их наступления осуществляется еще по каким-нибудь их свойствам.

Различают следующие основные свойства, которыми могут обладать случайные потоки событий:

- стационарность;
- ординарность;
- отсутствие последействия.

Стационарность. Свойство стационарности проявляется в том, что вероятность попадания того или иного числа событии на участок времени τ зависит только от длины участка и не зависит от расположения на оси О*t*. Другими словами, стационарность означает неизменность вероятностного режима потока событий во времени. Поток, обладающий свойством стационарности, называют стационарным. Для стационарного потока среднее число событий, воздействующих на систему в течение единицы времени, остается постоянным.

Ординарность. Свойство ординарности потока присутствует, если вероятность попадания на элементарный участок времени двух и более событии пренебрежимо мала по сравнению с длиной этого участка. Свойство ординарности означает, что за малый промежуток времени практически невозможно появление более одного события. Поток, обладающий свойством ординарности, называют ординарным.

Отсутствие последействия. Данное свойство потока состоит в том, что для любых непересекающихся участков времени количество событий, попадающих на один из них, не зависит от того, сколько событий попало на другие участки времени. Поток, обладающий свойством отсутствия последействия, называют **потоком без последействия**.

Поток событий, одновременно обладающий свойствами стационарности, ординарности и отсутствия последействия, называется **простейшим потоком событий**.

Под интенсивностью потока понимают

$$\lambda(t) = \lim_{\tau \to 0} \frac{m(t,\ t+\tau)}{\tau}, \qquad (8)$$

где $m(t, t+\tau)$ – среднее число событий в $(t, t+\tau)$.

Для простейшего потока интенсивность $\lambda = \text{const}$.

Если поток событий не имеет последействия, ординарен, но не стационарен, то его называют **нестационарным пуассоновским потоком**, а его интенсивность зависит от времени, т. е. $\lambda = \lambda(t)$.

В пуассоновском потоке событий (стационарном и нестационарном) число событий потока, попадающих на любой участок, распределено по закону Пуассона:

$$P_m = \frac{a^m}{m!} \cdot e^{-a}, \ m = 0, 1, \ldots, \tag{9}$$

где P_m – вероятность попадания на участок m событий;
a – среднее число событий, приходящихся на участок.

Для простейшего потока $a = \lambda\tau$, а для нестационарного пуассоновского потока

$$a = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \lambda(t)dt, \tag{10}$$

где τ –длина участка времени; t_0 – начало участка τ.

Процесс гибели и размножения

Рассмотрим еще одну типичную схему непрерывных Марковских цепей – так называемую схему гибели и размножения, часто встречающуюся в разнообразных практических задачах.

Марковский процесс с дискретными состояниями S_1, ..., S_n называется **процессом гибели и размножения**, если все состояния можно вытянуть в одну цепочку, в которой каждое из средних состояний (S_2, S_3, ..., S_{n-1}) может переходить только в соседние состояния, которые, в свою очередь, переходят обратно, а крайние состояния (S_1 и S_n) переходят только в соседние состояния (рис. 4.1).

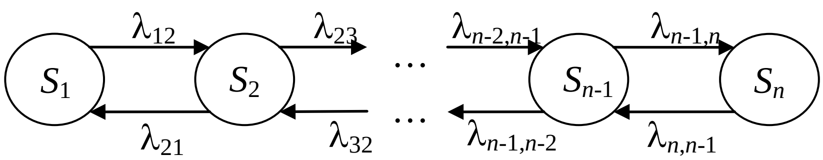

Рис. 4.1. Процесс гибели и размножения

Здесь λ_{ij} – плотность вероятности перехода системы из состояния S_i в состояние S_j в момент времени t.

Эта плотность находится по формуле:

$$\lambda_{ij}(t) = \lim_{\Delta t \to 0+0} \frac{P_{ij}(t, \Delta t)}{\Delta t}$$

Δt – время перехода из одного состояния в другое.

При постоянных интенсивностях потоков гибели и размножения и конечном числе состояний будет существовать стационарный режим. Система S с конечным числом состояний (n+1), в которой протекает процесс гибели и размножения, является простейшей эргодической системой.

Предельные (финальные) вероятности состояний для простейшего эргодического процесса гибели и размножения, находящегося в стационарном режиме, определяются по следующим формулам:

$$P_k = \frac{\lambda_{12}\lambda_{23}\ldots\lambda_{k-1,k}}{\lambda_{21}\lambda_{32}\ldots\lambda_{k,k-1}} P_1; \; P_1 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{21}} + \frac{\lambda_{12}\lambda_{23}}{\lambda_{21}\lambda_{32}} + \frac{\lambda_{12}\lambda_{23}\ldots\lambda_{k-1,k}}{\lambda_{21}\lambda_{32}\ldots\lambda_{k,k-1}}}. \qquad (11)$$